Zıplayan Kâğıt Kurbağalarla Matematiksel Deneyimler

Yüzyıllardan beri küçük eller, rengârenk kâğıtların arasında kayboluyor ve bir yolcuyla gizemli dünyalara dalıyorlardı. O yolcu İpek Yolu'nun yolcusuydu. Çin'i görmüş, Japonya'ya yelken açmıştı. Araplarla Kuzey Afrika'nın kum tepelerinden geçerek Pirene Dağları'nın eteklerine ulaştı. Mağribîlerin yanında matematik-le tanıştı. Sonra mı?..

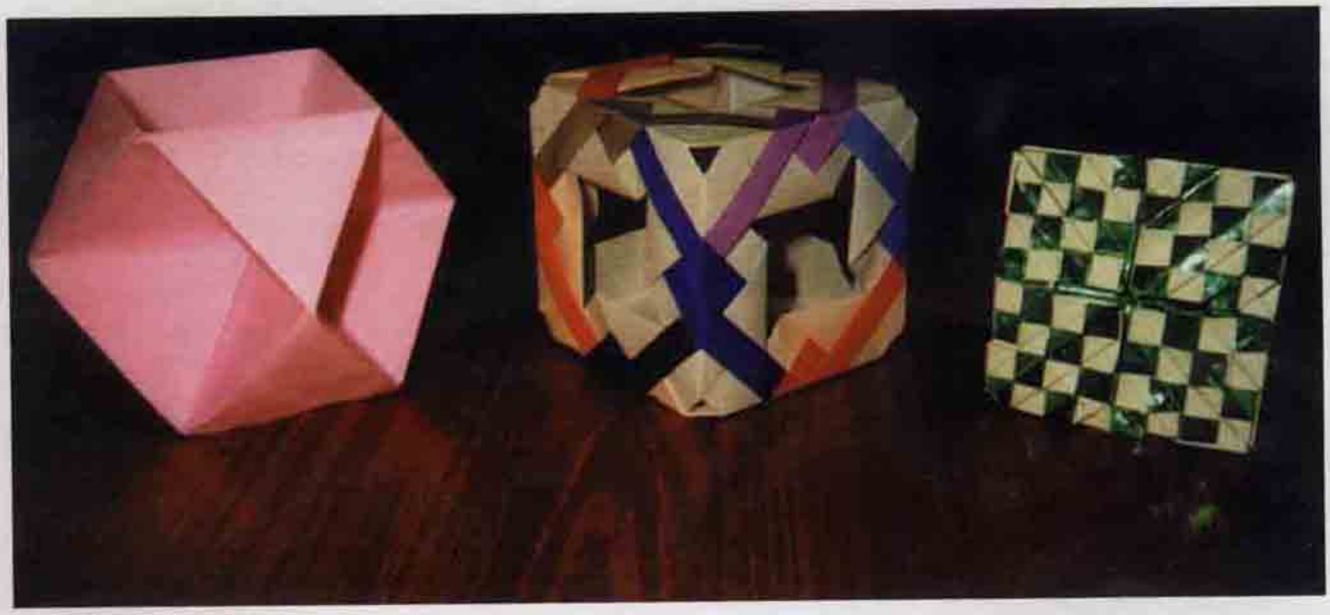
Origami sözcüğü, bana hep zıplayan kâğıt kurbağaları hatırlatır: İlkokul sıralarında elişi kâğıtlarından yaptığımız o zıplayan kurbağaları... Ancak sözkonusu kurbağaların, arkadaşlarımın yaptığı zıplayan kurbağalar olduğunu belirtmekte yarar var, çünkü benim yaptıklarım hiçbir zaman zıplamamıştı. Zaten yaptığım kâğıt gemiler de batar, uçaklarım en kısa sürede yere düşme becerisini gösterirlerdi. İşte bu elişi dersleri daha o günlerde, benim mühendislik kariyerimi noktalamıştır. Öte yandan aynı kâğıt kurbağalarla (en azından bildiğim kadarıyla) yaşadığım hiçbir matematiksel deneyimim yoktu. "Hâl böyleyken, bu başlığı kullanmak da nereden aklına geldi?" derseniz, onun da yanıtı hazır: Benim kâğıt kurbağalarımın matematikle pek arası olmamakla beraber, origamiyle insanlığın matematiksel deneyimleri onüç yüzyıl öncesine kadar dayanıyordu. Hem de bu deneyimler, yalnızca katlanmış kâğıt parçaları arasına saklanmakla kalmayıp tahtada, çelikte, toprakta da hayat buluyor ve günümüze ulaşmayı başarıyorlardı. Nasıl mı?

Kâğıt Katlama Sanatı: Origami

Çin'de kâğıdın icat edildiği tarih olduğuna inanılan M.S. 1. yüzyıldan bu yana, insanlar kâğıdı katlayıp ona çeşitli biçimler vermeyi hep sevmişlerdir. Öyle ki Çinliler'in daha o yıllarda geliştirdikleri kimi kâğıt katlama teknikleri, bugün bile kullanılmaktadır. Kâğıt, altıncı yüzyılda Budist rahipler tarafından Japonya'ya götürüldüğünde, oradaki kültürün de bir parçası olmayı başarmıştır. Japonların mimarilerine, Şinto dininin gereği olan günlük törenlerine giren kâğıtla beraber, onu katlama sanatı da önemli bir yer edinmiştir. Önceleri *orikata* adı verilen bu sanat, 1880'den itibaren *oru* (katlamak) ve *kami* (kâğıt) sözcüklerinden türetilen *origami* adıyla anılır olmuştur.

Öte yandan, kâğıt katlama teknikleri Endülüs'te de (İspanya) kendine yer bulmuştur. Araplar kâğıt yapma sırrını sekizinci yüzyılda Kuzey Afrika'ya taşırlarken, Mağribîler de aynı sırrı İspanya'ya götürmüşlerdir. Ancak Mağribîler için kâğıt katlamak, çeşitli şekillerin elde edildiği bir sanat malzemesi değil, geometri çalışmalarının bir aracı olmuştur. Bu çalışmalar, mimari etkinliklerine de yansımış ve kâğıt katlanarak elde edilen geometrik şekiller, meydana getirilen eserlerde, kendilerine önemli oranda yer bulmuşlardır. Bu Mağrip ya da Endülüs mimari stili onikinci yüzyıl boyunca etkisini korumuş ve günümüzde de, örneğin; Teksas Üniversitesi'nin Austin Kampüsü'nde yer alan pek çok yapıya yansımıştır.

Yakın dönemin mimarları ve sanatçıları da origami ve onun ortaya çıkardığı pek çok şekilden etkilenerek eserlerinde kullanmışlardır. 1930'lu yıllarda, ünlü bir Alman sanat ve dizayn okulu olan Bauhaus'ta, *Laszlo Moholy-Nagy* öğrencilerine kâğıt katlama alıştırmaları yaptırarak fonksiyonel dizaynı öğretmeye çalışmıştır.



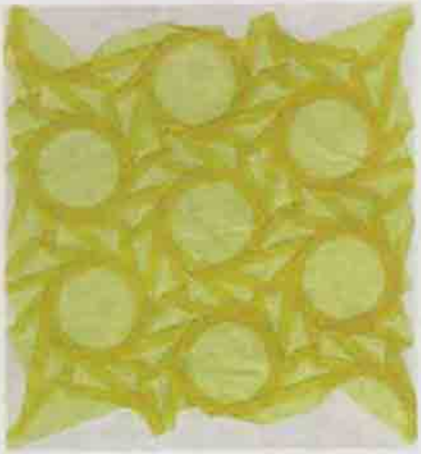
Origaminin etkisi göz alıcı mimari yapıların yanısıra ev eşyaları ve mobilyalara da yansımıştır. *Dansk*, origamide katlamaların ortaya çıkardığı basit biçimlerden etkilenerek, paslanmaz çelikten ev eşyaları dizayn ederken, *Dakota Jackson*'ın origami sandalyesi de *1996 Britannica Book of the Year*'da 1995 mobilya sanayisini örnekleyen tek eser olmuştur. Altında ise, onun "yenilikçi teknolojiyi temsil ettiği ve 21. yüzyılı bekleyen bir stil ortaya koyduğu" yazılıdır. Yani origami 12. yüzyıldaki etkinliğini 21. yüzyıla taşırken zıplayan kâğıt kurbağaların çok ötesinde bir alana da adını yazdırmaktadır.

Demokratik İspatlar

Origami, büründüğü gizemli şekillerle, sanatçıların ve mimarların ilgisini çekerken matematiğin soyut dünyasından da uzak kalmamıştır. Geometrik çizimlerde, fraktal eğrilerin kendi özgün yapılarında, cebirde kendine yer edinen origami, kafa kurcalayan pek çok soruyu da beraberinde getirmiştir. Örneğin; matematikçiler için ilgiye değer bir soru da, origamiyle hangi şekillerin yapılmasının mümkün ve hangilerinin yapılmasının imkânsız olduğudur. Halen yanıtlanamamış bu soruyu sorarken karşılaştırmak için ilk başvurdukları kaynaksa, yalnız cetvel ve pergelle çizilebilen geometrik şekillerdir. Cetvel ve pergelle yapılabilen çizimlerle, neyi kastettiğimize gelince... Gelin, pek çoğumuzun okul sıralarında tanıştığı ve aklımızın biraz tozluca bir rafına kaldırdığı (en azından benim) bu çizim tekniğini birlikte hatırlayalım. Öncelikle burada, cetvel sözcüğüyle yalnızca düzgün bir kenarın ifade edildiğini not düşmek gerekir. Yani üzerinde hiçbir ölçü birimi bulunmayan, herhangi bir eşyanın düzgün bir kenarı... İşte yalnızca bu düzgün kenar ve pergelle, herhangi bir kişi, iki noktayı birleştiren bir doğru çizebilir, çeşitli çemberler yaratabilir ya da açıları ikiye bölüp dik doğrular oluşturabilir. Aslında, cetvel ve pergelle yapılabilen tüm bu çizimler bir dizi adımdan oluşur. Bu adımlarsa şöyledir:

- İki nokta verildiğinde, bunları birleştiren bir doğru çizebiliriz.
- İki (paralel olmayan) doğrunun kesiştikleri noktayı belirleyebiliriz.
- p noktası ve r uzunluğu verildiğinde, p noktasını merkez alan r yarıçaplı bir çember çizebiliriz.
- Bir çemberin bir başka çember ya da doğruyla kesiştikleri noktaları tespit edebiliriz.

İşte bu aksiyomlar, bizim cetvel ve pergelle yapabileceğimiz tüm eylemlerin sınırlarını da çizer. Yani cetvel ve pergelle yapılabilen herşey, aslında yukarıda sözkonusu edilen basit adımlarla gerçekleştirilir. Aynı aksiyomlar kullanılarak, elbette, nelerin cetvel ve pergel yardımıyla yapılamayacağını da söyleyebiliriz. Herhangi bir açıyı üçe bölmek ya da uzunluğu $2^{1/3}$ birim olan bir doğru çizebilmek, bizim yalnız cetvel ve pergel kullanarak gerçekleştiremeyeceğimiz örneklerdendir. Bu örnekler ilk dile getirildiğinde, genellikle hemen herkesin yaptığı, kalem kâğıda sarılıp bir açıyı üçe bölmeye ya da ikinin küp kökü uzunluğunda bir doğru çizmeye uğraşmaktır. Hatta olayın bazen inatlaşmaya vardığı; sırf açıyı bölmüş olmak için cetvel ile pergelin tanımının tartışıldığı bile olur. Kimi zaman ise



"Demokrasilerde çare tükenmez." prensibiyle, oylama yoluna gidilir. Ama matematiğin demokrat olduğunu kim söylemiş ki?

Tüm bunların origamiyle ne ilgisi olduğuna gelince... *David Auckly* ve *John Cleveland* da aynı soruyu kendilerine sormuşlar ve yayınladıkları makalelerinde bir takım ispatların ardından şu sonuca ulaşmışlar:

" Origamiyle yapılabilen herşey, cetvel ve pergel kullanılarak da yapılabilir. Ama bu ifadenin tersi doğru değildir."

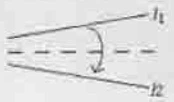
Yukarıdaki bu ifadeyle tüm sorunlar çözümlenmiş ve origamiyle yapılabilenlerin sınırları çizilmiş gibi gözükse de, origaminin bize bir sürpriz yapmadığı söylenemez. Çünkü origamiyle bir açıyı üçe bölmek ya da $2^{1/3}$ birim uzunluğunda bir doğru elde etmek mümkündür. Şimdilik sözkonusu örneklerle uğraşımızı biraz erteleyerek; gelin, önce bu mantık açmazından kurtulalım. Aslında sorun, basit bir sebepten; origamiyi tanımlayan aksiyomlardan doğmaktadır. Yukarıdaki sonuca ulaşan yazarlar, origamiyi "beş aksiyom" kullanarak tanımlamışlardır. Bu aksiyomlar oldukça basittirler ve hepsini de cetvel ve pergel yardımıyla elde etmek mümkündür. Yani tam yukarıda ifade edildiği gibi... Oysa bu aksiyomlar, origamiyle yapılabilen tüm katlama işlemlerini içermezler. Diğer bir deyişle, yazarların listesinde eksik kalmış bir (ya da belki de birden fazla) aksiyom daha vardır. İşte bu aksiyomla, cetvel ve pergelin yapamadığı, açıyı üçe bölmek ya da ikinin küp kökü uzunluğunda bir doğru çizebilmek mümkün olur. Yani origami, henüz matematikçilere pes etmiş değildir.

Huzita'nın Origami Aksiyomları

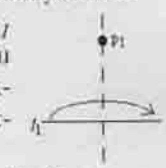
Aslında kâğıt katlama yöntemleri başta oldukça karmaşık gözükür. Hele benim gibi zıplamayan kâğıt kurbağalara sahip bir kişi için, gözükmekten öte karmaşıktırlar. Ancak aynı cetvel ve pergel yardımıyla yapılan çizimler de olduğu gibi, origami için de bir dizi aksiyom vardır. Şimdilik bilinen en güçlü origami aksiyomları ise İtalyan-Japon matematikçi *Humiaki Huzita*'nın ortaya koyduklarıdır:

(O1) p_1 ve p_2 noktası verildiğinde, bunları birbirleştiren bir doğru katlayabiliriz.

(O2) Verilen p_1 ve p_2 noktası için, p_1 noktasını p_2'nin üstüne katlayabiliriz.

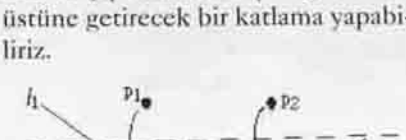


(O3) l_1 ve l_2 doğruları verildiğinde, l_1 doğrusunu l_2'nin üstüne katlayabiliriz.



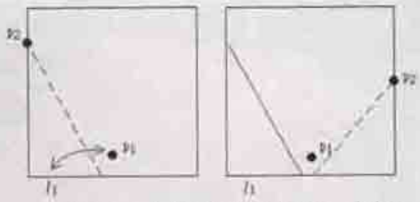
(O4) Verilen bir p_1 noktası ve l_1 doğrusu için, l_1'e dik ve p_1 noktasından geçen bir katlama yapabiliriz.

(O5) Verilen p_1 ve p_2 noktaları ile l_1 doğrusu için, p_2 noktasından geçecek ve p_1 noktasını l_1 doğrusunun üstüne getirecek bir katlama yapabiliriz.



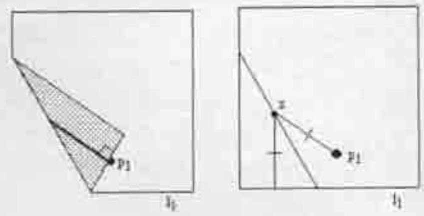
(O6) p_1 ve p_2 noktaları ile l_1 ve l_2 doğruları verildiğinde, p_1 noktasını l_1 ve p_2 noktasını l_2 doğrusu üstüne getirecek bir katlama yapabiliriz.

Huzita'nın ilk 4 aksiyomunu kâğıt üstünde görmek oldukça kolaydır. Ancak 5. ve 6. aksiyomlar, alışmak için biraz daha zaman isterler. İlgiye değer bir nokta ise, ilk 5 aksiyomdaki işlemlerin aslında cetvel ve pergel kullanılarak da elde edilebileceğidir. Gelin, önce 5. ve 6. aksiyomlara biraz daha ısınalım:



* Kare şeklinde bir kâğıt alalım. Karenin alt kenarına l_1 ve kâğıdın ortasında l_1'e yakın bir noktaya p_1 diyelim. Daha sonra kâğıdın sağ ya da sol kenarında, herhangi bir yerde, bir p_2 noktası belirleyelim ve (O5) aksiyomunu uygulayalım. Ardından farklı bir p_2 noktası daha seçelim. Bunu 8 ya da 9 kez tekrarlayalım. Sonuçta ne mi olur?

Sonuçta ortaya çıkan, kâğıtta bir parabol şeklinin belirmesi olacaktır.



Bunun nedenini görmek için, önce alıştırmamızdaki katlamalardan birini yapalım. Katlı parçayı tekrar açmadan önce, koyu bir siyah kalem alalım ve l_1'in katlı olan kısmına dik olacak şekilde p_1 noktasından katlı parçaya bir doğru çizelim (Yukarıda soldaki şekilde olduğu gibi). Eğer kalemimiz yeterince koyu olur ve biraz da akıtırsa, çizgimiz kâğıdın hem arkasına hem de katlı kısmın altına geçebilir. Böylece katlı kısmı açtığımızda, karşımıza iki doğru çıkacaktır (Yukarıda sağdaki şekilde olduğu gibi). Dikkat edilmesi gereken nokta, her iki doğrunun da aynı uzunluğa sahip olduğu ve bunlardan birinin l_1'e dik olduğudur. Bu da göstermektedir ki, katlamanın yapıldığı çizgi üzerinde yalnızca bir nokta p_1 noktası ve l_1 doğrusuna eşit uzaklıktadır (Sağdaki şekilde x noktası). Diğer bir deyişle; katlama çizgimiz, odak noktası p_1 ve doğrultmanı l_1 doğrusu olan parabole teğettir. Yani origami, basit de olsa analiz bile yapmamıza olanak sağlamaktadır. Biraz daha uğraşırsak, katlamaların yapıldığı doğrular zarfının bir parabol oluşturduğunu görmek de işten bile değildir.

Bu alıştırmamızda gözlenmesi gereken çok önemli bir nokta ise, parabollerin ikinci dereceden denklemlerle verildiğidir. Dolayısıyla (O5), bizim için ikinci dereceden denklemleri de çözebilmektedir. Elbette, kâğıt katlayarak bir denklemi çözmek garip gözükebilir, ancak yaptığımızın matematik dilindeki tercümesi tam olarak budur.

* Şimdi de (O6)'yla biraz uğraşalım. Dikkatimizi ilk çeken, (O6)'nın aslında (O5)'e çok benzediğidir. Hatta (O6), 2x(O5) olarak bile nitelendirilebilir. (O6)'yı bu şekilde ifade etmemizin sebebi ise, aynen (O5)'te olduğu gibi, odağı p_1 ile doğrultmanı l_1 olan bir parabole ilaveten odağı p_2 ve doğrultmanı l_2 olan başka bir parabol daha elde etmemizdir. Tabii, eğer bir önceki alıştırmayı (O6) için uygularsak... Dolayısıyla (O6) kullanılarak, düzlemde çizilmiş iki parabol verildiğinde, her ikisine teğet bir doğru bulunabilmektedir.

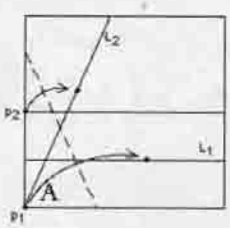
Aslında bu yapılan da üçüncü dereceden bir denklemi çözmekle denktir. İşte bu, cetvel ve pergelle yapılamayacak bir iştir. Zaten bir açıyı üçe bölmek ya da ikinin küp kökü uzunluğunda bir doğru çizmek de sonuçta üçüncü dereceden bir denklemi çözmeye indirgenebilir. O nedenle origami, cetvel ve pergelin tek başına beceremediği pek çok eylemi gerçekleştirebilmektedir. Şimdi dilerseniz, bu eylemlerden biri olan açının origamiyle üçe bölünmesini birlikte inceleyelim.

Açı Nasıl Üçe Bölünür?

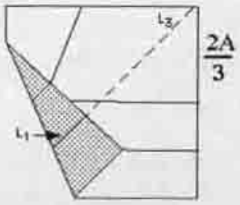
İşte böyle... 1970'lerde Hisashi Abe'in geliştirdiği bu yöntemle:

1. Üçe böleceğimiz açı, kâğıdımızın alt sol köşesinde bulunsun. Bu açıya A diyelim. (Unutmayalım ki, burada A'nın bir dar açı olduğunu varsayıyoruz, fakat bu yöntemi geniş açılara uyarlamak da son derece kolaydır.) Şimdi de alt kısımda, birbirine paralel ve eşit uzaklıkta katlama çizgileri oluşturalım.

2. Sıra (O6)'yı uygulamaya geldi. p1'i L1, p2'yi L2 üzerine katlayalım.

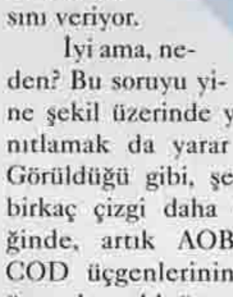


Bunu yapmak kolay olmayabilir! (Daha doğrusu öyleymiş, çünkü denemeye cesaret dahi etmiyorum.) Belki birkaç denemeyle katlama için doğru yer belirlenebilir.



3. L1 doğrusunun katlanmış kısımda kalan (yani kâğıdın arka yüzünde) kısmını uzatalım ve elde ettiğimiz yeni çizgiye L3 diyelim. Şimdi ikinci adımda yaptığımız katlamayı açalım ve L3'ü alt sol köşeye uzatalım. Dikkat edin, çünkü uzattığınız çizginin tam köşe noktasını bulması gerekli. Sürpriz! L3 çizgisi, şu anda tam olarak A/3 açısını veriyor.

İyi ama, neden? Bu soruyu yine şekil üzerinde yanıtlamak da yarar var. Görüldüğü gibi, şeklimize birkaç çizgi daha eklendiğinde, artık AOB, BOC, COD üçgenlerinin benzer üçgenler olduğunu görmek oldukça kolay hale geliyor. Böylelikle AOB, BOC ve COD açıları birbirine eşit olduğundan, elimizde A/3 açısı kalıyor.



Arşimet Öyle Diyor

Her ne kadar, buraya kadar origaminin becerip cetvel ve pergelin yetersiz kaldığı eylemlerden söz ettiysek de, cetvel-pergel ikilisinin hakkını da yememek gerekiyor. Çünkü ölçülendirilmiş bir cetvel (yani bildiğimiz anlamıyla bir cetvel) ile pergel, açının üçe bölünmesi işini kolayca başarabiliyor. Bunu kim mi söylüyor? Arşimet... Arşimet'ten bu yana matematikçiler, eğer düzgün kenar vazifesi gören cetvelimizde iki nokta işaretlenirse, açının üçe bölünebileceğini biliyor ve söylüyorlar. Bu açıdan bakıldığında, origaminin yapabildiklerinin neden daha geniş alanlara yayıldığını anlamak, biraz daha kolaylaşıyor. Çünkü kâğıdın düzgün kenarı, 1/2, 1/4, 1/8,... oranlarında katlanarak, origamide kolaylıkla ölçülendirilebiliyor. Şu ana kadar ise, origami ile ölçülendirilmiş cetvel ve pergelin detaylı bir karşılaştırması yapılmış değil.

Yapılmayan ya da daha doğrusu yapılamayan bir diğer iş de, Huzita'nın aksiyom listesine yeni aksiyomlar eklemek... Çünkü hâlâ origamiyle ilgili aksiyomların tamamlanıp tamamlanmadığı bilinmiyor. Meselâ, "Beşinci ya da daha büyük derecelerden denklemleri çözmemizi sağlayacak bir katlama olabilir mi?" sorusu böyle bir aksiyomun doğmasını bekliyor. Ancak şimdiye kadar yapılan çalışmalar, yedinci bir aksiyomun olmadığına dair bir ışık yaksa da; bu ışık, ispat olma yolundan oldukça uzakta... Yani matematikçiler öyle diyor!

Han Nazmi Özsöylev

Kaynaklar:
Auckly, D. ve J. Cleveland, "Totally Real Origami and Impossible Paperfolding", American Mathematical Monthly, Mart 1995, 215-226
http://www.math.uri.edu/~hull/geoconst.html
http://www.lib.utexas.edu/Exhibits/origami/math/
http://www.lib.utexas.edu/Exhibits/origami/images/
http://www.origami.vancouver.bc.ca/Info/history.html
http://www.origami.vancouver.bc.ca/Pictures/
http://www.netspace.org/~ema/origami/
http://www.parc.xerox.com/ops/projects/forum/1996/images/