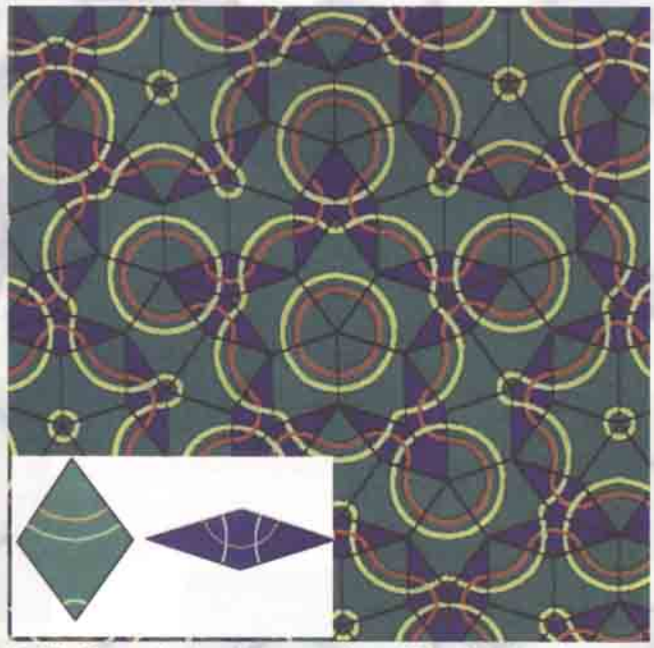
Aperiyodik Yazılar II

Penrose Karoları

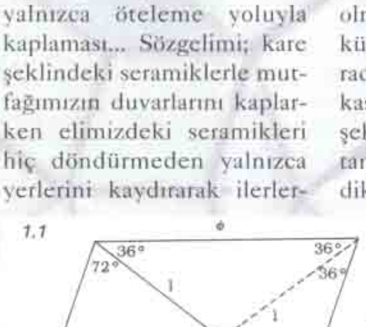


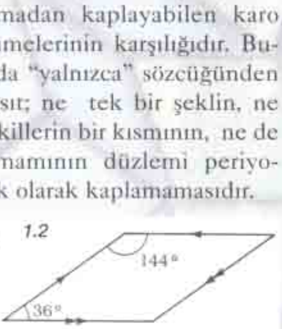
Şekil 2 Penrose karolarında uygun açılar, renkli bantlarla desenlendirilerek aperiyodik kaplama sağlanır.

Kimbilir kaç kez okumuşumdur; "bakmak" ve "görmek" arasındaki farkı anlatan o uzun köşe yazılarını. Hemen hepsi de farklı gerekçelerle kaleme alınır: Sokakta herhangi bir insanla çarpışmadan yürümenin zorluklarından uzak görüşlülük isteyen memleket meselelerine kadar pek çok farklı gerekçe... Bu yazınınki ise pekâlâ *mutfak duvarları, banyonun zemini* veya *şehrin işlek kaldırımları* olabilir. Çünkü insan bakmakla yetinmeyip görmeye çalışınca, kendisini seramik, ahşap ya da beton "karo kaplamalarla" çepeçevre bulması işten bile değildir. Olayın dekoratif yönü bir yana bırakılacak olursa, bu karolar aslında matematiğin soyut dünyasından kopup gelmiş gibidirler. Nasıl mı?

İsterseniz, önce işin alfabesiyle başlayalım. Periyodik bir kaplamanın ne olduğunu hepimiz kestirebiliriz: Elimizdeki karonun -üçgen, kare ya da hayal edilebilecek herhangi bir şeklin- düzlemi yalnızca öteleme yoluyla kaplaması... Sözgelimi; kare şeklindeki seramiklerle mutfağımızın duvarlarını kaplarken elimizdeki seramikleri hiç döndürmeden yalnızca yerlerini kaydırarak ilerlersek, bu periyodik bir kaplama olacaktır. Tabii, periyodik kaplamalar sadece bizim mutfaklarımızı süslemez. Örneğin; Hollandalı sanatçı *Escher*'in pek çok yapıtı canlı figürleri andıran şekillerin periyodik kaplamalarıyla oluşmuştur. Eğer işin sanatsal yönünü biraz hafife alırsak, hemen her öğrencinin defterinde de can sıkıntısı ya da matematiksel güdüler(?!) oluşmuş periyodik kaplamalara rastlamak mümkündür.

Altıgen gibi sonsuz çoklukta şekil, düzlemi yalnızca periyodik olarak kaplayabilmektedir. Bir diğer sonsuz çoklukta şekilse düzlemi hem periyodik hem de periyodik olmayan şekillerde kaplayabilir. Tabii, insanın aklına; aperiyodik olarak düzlemi kaplayan şekil ya da şekillerin var olup olmadığı gelmektedir. "Aperiyodik" terimi, *Grünbaum* ve *Shephard*'ın *Tilings and Patterns* adlı kitaplarında kullanmayı tercih ettikleri bir terimdir ve düzlemi yalnızca periyodik olmadan kaplayabilen karo kümelerinin karşılığıdır. Burada "yalnızca" sözcüğünden kasıt; ne tek bir şeklin, ne şekillerin bir kısmının, ne de tamamının düzlemi periyodik olarak kaplamamasıdır.





Şekil 1.1 Eşkenar bir dörtgen özel bir şekilde ikiye ayrılırsa "uçurtma" ve "ok ucu" elde edilir. Burada φ altın oranı temsil eder.
Şekil 1.2 "Şişman" ve "zayıf" karolar da düzlemi aperiyodik olarak kaplarlar.

Uzun yıllar boyunca matematikçiler, işte böyle bir şekiller kümesini bulmaya çalışırlar. Bunun ilk örneği ise 1964'te Robert Berger tarafından bulunur. Ancak bu kaplama pek öyle deftere ya da mutfak duvarına sığacak cinsten değildir, çünkü 20 000 den fazla şekilden oluşmaktadır. Geçen yıllar boyunca daha küçük şekil kümeleri bulunmaya devam eder ve 1974 yılına gelindiğinde Oxford Üniversitesi'nden *Roger Penrose* şekillerin sayısını ikiye indirmeyi başarır.

Paraşütle Atlama

Sayısı ikiye inen bu şekillerle çok çeşitli formlarda karşılaşmamız mümkündür. Ancak bunlardan en ilginç olanları "uçurtma" ve "ok ucu" şeklinde olanlardır. *Penrose*'un bu marifetli karolarını elde etmek için yapmamız gereken sadece, 72 ve 180 derecelik iç açılara sahip eşkenar bir dörtgeni özel bir şekilde iki parçaya ayırmaktır. Dörtgenimiz içinde çizeceğimiz iki köşegenden uzun olanını *altın orana* göre böler ve bu bölüm noktasını diğer iki köşeyle birleştirecek olursak, artık elimizde bir ok ucuyla bir uçurtmayı andıran iki şekil vardır ve işte bu şekil çifti de *Penrose karolarının* bir örneğini oluşturur (Şekil 1.1).

Elbette, elimizdeki bu iki şekli yeniden birleştirirsek tekrar eşkenar dörtgenimizle başbaşa kalırız ve eşkenar bir dörtgenle düzlem periyodik olarak kaplanabilir. Ancak karolar bu şekilde dizilemezler, yani aperiyodik bir kaplama için bir takım diziliş kuralları vardır. Örneğin; her bir karonun (uçurtma ve ok ucu) uygun gelen açıları renkli bantlarla desenlendirilebilir. Böylelikle yalnızca aynı renkteki bantların kesiştiği kenarlar yanyana getirilmiş olur (Şekil 2). Bir diğer yol ise, yap-boz oyunlarındaki gibi karoların dizildiklerinde birbirlerine geçmelerini sağlayan kenar çıkıntıları koymaktır (Şekil 3). Böylesi ayrıntılar hem karoların dizilişini kolaylaştırmakta hem de aperiyodik bir kaplamayı zorunlu kılmaktadır.

Bu ilginç karoları bulan Penrose, John Conway ile çalışmaları esnasında tüm düzlemin sonsuz çoklukta yolla bu "uçurtma ve ok ucu" karolarıyla kaplanabileceğini göstermiştir. Bu kaplamalardan hiçbirisi de periyodik değildir. Kimi kaplama örnekleri simetriktirler ve insanı şaşırtan bir uyum gösterirler. Fakat her defasında taşıdıkları düzen bir yerlerde bozulur ve yine o aperiyodik özellikleri gözler önüne serilir.

Sonsuz çoklukta kaplama örneği olmakla beraber, bir örnek diğerlerinden ancak sonsuz bir düzlem üzerine yayıldığında ayırt edilebilir. Bu olayı uçuk bir şekilde anlatmaya kalkışırsak; bir matematikçiyi herhangi bir örnekle kaplı bir düzleme uçaktan paraşütle bırakmamız yeterli olacaktır. Böyle bir durumda o kişinin nasıl bir kaplama üstüne düştüğünü söyleme şansı olmaz ve ne kadar dolanırsa dolansın, sonunda kendini bulacağı yer yine aynı benzer çevredir. Artık kişi -matematikçi de olsa- sonsuza kadar kaybolmuştur.

Bu karoların dikkati çeken bir diğer yönü de, düzlemi tam olarak kaplayan her bir örnekte "uçurtma"ların "ok uç"larına oranının 1.618... olan *altın oranı* vermesidir. Bu oran irrasyonel olduğundan, aynı kaplamayı tam sayıda şekillerden oluşan tek bir grupla sağlamak mümkün değildir. Eğer böyle bir şekiller grubu olsaydı, aynı grup pekâlâ periyodik bir kaplama için de kullanılabilirdi ve bu da elbette hem *Penrose* hem de bizler için tam bir düş kırıklığı olurdu.

Penrose'un Tavukları

Penrose, uçurtma ve *ok uçlarının* düzlemi tam olarak kaplayabildiği ve her zaman aperiyodik desenler oluşturduklarını göstermek için *arttırma ve azaltma* (*Conway*'in koyduğu isimle "*inflation and deflation*") yollarına başvurmuştur. Her bir *ok ucunu* simetrik olarak ikiye ayırmak ve daha sonra yarım *ok uçlarıyla uçurtmaları* birleştirmek, daha büyük ölçeklerde *uçurtma* ve *ok uçları* yaratmaktadır. İki yarım *ok ucu* ile bir *uçurtma* bir büyük *ok ucu*, iki *ok ucu*yla iki *uçurtma* da bir büyük *uçurtma* oluşturur. Oluşan bu büyük ölçekli şekiller de yine tam bir kaplama deseni meydana getirmek için kullanılabilir ve aynı bölüp birleştirme yöntemi sonsuza dek uygulanabilir. Böylelikle *arttırma* metodu *uçurtma* ve *ok uçlarının* düzlemi tam olarak kaplayacaklarını kanıtlar.

Benzer şekilde *azaltma* metoduyla da, her bir karo aynı şekle sahip daha küçük parçalara bölünebilir. Eğer bir desen parçasındaki her bir karo yine bölünürse, daha fazla karoya sahip ve daha önce belirttiğimiz diziliş kurallarına uyan yeni bir desen parçası elde edilir. Aynı bölme işlemi tekrar tekrar yinelenirse, diziliş kurallarına uyan sonsuz sayıda parçacıktan oluşan bir şekil oluşur. Sözkonusu *azaltma* yöntemi, aynı zamanda *Penrose desenlerinin*, Türkçe'mizi biraz zorlarsak, *kendine benzer* olduğunu göstermektedir. Burada "kendine benzemekten" kastım, herhangi bir kaplamadaki sonlu bir bölgenin aynı desen içerisinde yine kendini gösterdiği ya da tekrarladığıdır. Yani Çin Seddi'ne bir *Penrose deseni*nin kaplandığı ve de meraklı bir turistin -muhtemelen Japon uyruklu ve matematiksel bir heyecan içerisindeki bir turist- seddin fotoğraflarını çektiğini varsayarsak, farklı fotoğraf karelerinde, az ya da çok sıklıkla, sonlu herhangi bir bölge tekrar tekrar görülebilecektir.

Öte yandan *uçurtmalar* ve *ok uçları*, belli bir teknikle başka şekillere sokulabilir. Örneğin; *Penrose* bu yolla *uçurtma* ve *ok uçlarını* düzlemi aperiyodik olarak kaplayan tavuklara dönüştürmüştür (Şekil 4). Bu tavuklar asimetrik olmalarına rağmen, düzlemi kaplayabilmeleri için hiçbirini tersyüz etmeye de gerek yoktur. Tabii, ortaya çıkan her şekil bir tavuk kadar ilginç değildir. Ancak gene Penrose'un bulduğu iki basit şekil vardır ki, bu aperiyodik kaplamalara meraklı matematikçilerin işini oldukça kolaylaştırmıştır. Bu şekiller bir "şişman", bir de "zayıf" iki eşkenar dörtgenden oluşur (Şekil 1.2). *Şişman* olanın 72 ve 108 derecelik, *zayıf* olanın da 36 ve 144 derecelik iç açıları vardır. Daha önce olduğu gibi, hem karolar hem de kapladıkları alanlar *altın oran*la uyumluluk içindedir ve yine sonsuz çoklukta yolla düzlemi aperiyodik olarak kaplayabilmektedirler.

Periyodiğimsi Bir Ara

Penrose karoları bu aperiyodik tabiatlarına rağmen, kendi içlerinde periyodik bir sır saklarlar. Daha doğru bir deyimle, bu sır *periyodiğimsidir*. Çünkü bu karolar konumsal bir düzen içindedir ve bu durum aperiyodik bir kaplamaya periyodik denilebilecek bir alt sistem sağlamaktadır. Üstelik Penrose karolarını üçüncü boyuta taşımak ve laboratuvara girip kristalimsilerin arasında onu yeniden keşfetmek de pekâlâ mümkündür. Ama tüm bunlar, periyodiğimsi bir aranın ardından, gelecek sayıda...

Han Nazmi Özsöylev

Şekil 3 Yap-boz oyunlarındaki gibi kenar çıkıntıları da, periyodik bir kaplamanın oluşmasını önler.

Şekil 4 Penrose'un aperiyodik tavukları

Çözmece

1. Açıları tamsayı olan, birbirinden farklı kaç üçgen vardır? (Açılar derece cinsinden alınmalıdır.)

2. n, 1'den büyük pozitif bir tamsayı olmak üzere, x, y ve z pozitif tamsayıları $x^n+y^n=z^n$ eşitliğini sağlasın. Eğer z ve x ile z ve y arasındaki farklar 1'den büyükse, ne x ne de y'nin asal olamayacağını ispatlayınız.

Geçen Ayın Çözümleri

1. $k=(\sqrt{5}+2)^{1/3}-(\sqrt{5}-2)^{1/3}$ olsun. O zaman

$$k^3=(\sqrt{5}+2)-(\sqrt{5}-2)$$
$$-3((\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2))^{1/3}\cdot((\sqrt{5}+2)^{1/3}-(\sqrt{5}-2)^{1/3})$$

eşitliğini elde ederiz. Bu durumda $k^3=4-3k$ veya $(k^3-1)+3(k-1)=0$ olur. Böylelikle $(k-1)(k^2+k+4)=0$ elde edilir ki, bu da bize $k=1$ sonucunu verir (Çünkü $k>0$).

2. f_n ve f_{n+1}'in $d>1$ şeklinde ortak bir bölenleri olduğunu varsayalım. Bu durumda $f_{n+1}-f_n$, d tarafından bölünür. Aynı zamanda $f_{n+1}-f_n=f_{n-1}$ olduğundan, f_{n-1} de d tarafından bölünür. Aynı şekilde, d'nin $f_{n-2}, f_{n-3},...$ ve en sonunda da f_1'i bölebileceğini (tümevarımla) kanıtlayabiliriz. Ancak $f_1=1$'dir. O yüzden $d>1$ tarafından bölünemez. Bu da baştaki varsayımımızla çelişir ve böylece ispatımız tamamlanmış olur.

Kaynaklar

Bergil, M.S., *Doğada, Bilimde, Sanatta Altın Oran*, Arkeoloji ve Sanat Yayınları, İstanbul 1988

Gardner, M., *Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers*, W.H. Freeman, New York, 1989

Grünbaum, B. ve G. C. Shephard, *Tilings and Patterns*, W. H. Freeman, New York, 1987

Nelson, D.R., "*Quasicrystals*", Scientific American, Ağustos 1986

Peterson, I., *The Mathematical Tourist*, W.H. Freeman, New York, 1988

Steinhardt, P.J., "*Quasicrystals*", American Scientist, Kasım-Aralık 1986