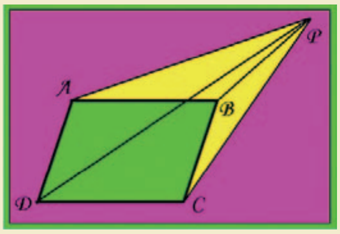
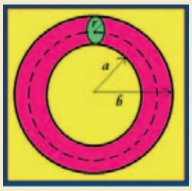
E n g i n   T o k t a ş
m a t e m a t i k _ k u l e s i @ y a h o o . c o m

Paralelkenarda Açı



ABCD paralelkenarımızın dışından, PAB açısı ile PCB açısı eşit olacak biçimde bir P noktası seçelim. Böyle bir durumda APD açısı ile CPB açısının da eşit olması gerektiğini kanıtlayabilir misiniz?

Önce Düşünme Zamanı

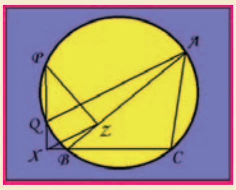


Bazen bir sorunun en açık çözümüne hemen yönelip işlem kalabalığına dalmak yerine çözüme geçmeden önce şöyle derin bir nefes almanın ve bu esnada farklı ve daha basit bir yol düşünmenin size o kadar faydası olabilir ki! İşte size bir örnek: İntegral hesabına girmeden temel geometri bilgisi ile şekildeki toroidin alanını bulabilirsiniz. Ama nasıl?

Las Vegas'ta Olasılık

Şöyle bir oyunumuz var: Oyuncu, elindeki madeni parayı tura gelinceye kadar atmaya devam ediyor. Tura gelen son tur öncesine kadar oyuncu N tane yazı atmışsa oyunu düzenleyen casino oynayana 2^N YTL ödüyor. Yalnız N sayısı kaç olursa olsun casino en fazla ödül olarak 1024 YTL verebiliyor. Bu oyunu sonsuz sayıda oynadığınızda ortalama kazanma miktarınızı göz önünde bulundurarak bu oyuna girmenin adil ücretini hesaplayınız. (Ücret, ortalama kazanma miktarınız ile aynı olmalı)

Yaz Sorusu



Biraz karışık görünmesine rağmen son derece basit ve uygun bir o kadar da güzel bir soru var huzurlarınızda. ABC üçgeninin çevrel çemberi üzerinde bir P noktası alalım. P noktasından geçen ve BC doğrultusunu X noktasında dik kesen doğrunun çevrel çemberi kestiği noktaya Q diyelim. Son olarak da P noktasından AB'ye bir dikme indirelim ve AB kenarını kestiği noktaya Z diyelim. Q ve A farklı noktalar iken, XZ'nin her zaman QA'ya paralel olacağını bu güzel yaz gününde gösterebilir misiniz?

Matematiğin Şaşırtan Yüzü

Bir Sayının Hikayesi

İnsanlar matematiği niçin sever? Bu sorunun cevabını tarihte, felsefede aramaya gerek yok, cevap aslında hepimizin içinde yer alıyor. Bir tabloyu, bir müzik parçasını, mimari bir yapıyı niçin seviyorsak matematiği de onun için severiz. Sanat, doğanın yansıması sonucu oluşan estetik bir güzellik iken matematik, yansımadan öte doğanın ta kendisidir! İşte bu yüzden en saf güzelliği matematikte buluruz biz. Şu anda yapabileceğiniz onca şey varken matematik ile ilgili bu satırları okuyorsanız zaten bu saf güzelliği bir şekilde keşfetmişsiniz demektir.

Matematiğin her alanında estetikle karşılaşmak mümkün ama bana kalırsa sayıları özel bir tarafa ayırmak gerekiyor. Bazen toplama,çıkarma,çarpma,bölme gibi basit dört işlemle yarattıkları ahenk, uyaklı bir şiirin ahengiyle yarışır hale gelebiliyor. Bu durumun sonsuz örneklerinden bir tanesi örneğin "37" sayısıdır. Asal olması bile bizi kendine aşık etmeye yeter iken 37 sayısının sayılarla yaptığı dans bir de bizi büyülüyor. İşte bu sihirli sayının ilk özelliği:

37x3 = 111,
37x6 = 222,
37x9 = 333,
37x12 = 444,
,...., 37x27 = 999.

Yukarıda görüldüğü gibi sayımızı 3 ve 3'ün katları ile çarptığımızda böyle bir tablo oluşuyor. 37 sayısının özellikleri tabi bununla sınırlı değil. Hemen iki özelliğinden daha bahsedelim:

$$37.(3+7) = 3^3 + 7^3$$
$$3^2 + 7^2 - 3.7 = 37$$

Sayıların kendi içinde yarattığı uyum gerçekten şaşırtıcı. İnsanlık tarihi boyunca birçok matematikçi bu tip ilişkileri bulmak için çalıştı. Örneğin tarihin en büyük matematikçilerinden Ramanujan'ın seriler ile ilgili bulduğu formüllerdeki uyum o kadar etkileyicidir ki bir insanın bu formülleri yazıp, çerçeveletip duvarına asması kesinlikle şaşırtıcı bir durum olmaz.

37 sayısının en güzel özelliklerinden biri aşağıda gösteriliyor:

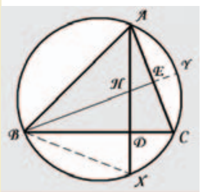
037, 370, 703 (1,10,19)
074, 407, 740 (2,11,20)
148, 481, 814 (4,13,22)
185, 518, 851 (5,14,23)
259, 592, 925 (7,16, 25)
296, 629, 962 (8,17,26)

Parantez içindeki sayıların 37 ile çarpımından soldaki sayılar oluşuyor. Yalnız dikkat ederseniz soldaki üçlülerin rakamlarının aynı olduğunu, sadece yerlerinin değiştiğini fark edeceksiniz. Biraz daha dikkat ederseniz çarpanların rasgele değil belirli bir harmoniyle ilerlediğini görebilirsiniz.

Bu ay 37 sayısının hikayesini sizlere aktardık ancak emin olun her sayının ayrı güzellikte ve ilginçlikte bir hikayesi mevcut. İşte bu da matematiğin ne kadar zengin olduğunun önemli bir kanıtı!

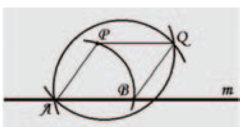
Geçen Ayın Çözümleri

İki Doğru Dik mi?



Öncelikle sorunun çözümünde kullanacağımız H noktasının üçgenin içinde yer alacağı varsayımını ispatlamayı size bırakıyoruz. Şimdi gelelim sorunun cevabına. HD = DX ve ADC açısı 90 derece olduğuna göre BH = BX ve HBD açısı = DBX açısı eşitlikleri geçerli olur. Bu durumda YC yayı ile CX yayı birbirine eşit olur. Şimdi çember içinde iki kirişin kesiştiği özelliği kullanacağız: 90° = ∠ADC = (AB yayı + XC yayı)/2 = (AB yayı + YC yayı)/2 = ∠AEB. Böylelikle ∠AEB = 90 olduğunu göstermiş olduk.

Sadık Dost



İlk olarak m doğrusu üzerinde rasgele bir A noktası seçelim. Sonra merkezi A olan ve P'den geçen çember yayını çizelim. Bu yay m doğrusunu B noktasında kessin. Sıra P noktası merkezli ve A'dan geçen çember yayını çizmeye geldi. Son olarak da B merkezli ve A'dan geçen çember yayını çizelim. En son çizdiğimiz iki yayın kesişme noktalarının birinde A diğerinde ise Q noktası bulunur. Eğer P ve Q noktalarından geçen doğruyu çizersek, bu doğru m doğrusuna paralel olur. Acaba neden?

Aralarında Asal

10 ardışık tamsayımız n, n+1, ..., n+9 olsun. Sayı ikililerini (n+r, n+s) = (n+r, |r-s|) şeklinde gösterebildiğimiz ve |r-s|<10 olduğu için sayılardan en az birinin 10'dan küçük bir asal sayıya bölünmediğini göstermek yeter. Bu 10 sayı arasında 2 ile bölünenlerin sayısı 5, 3 ile bölünen ve tek olanların sayısı en çok 2, 5 ile bölünen ve tek olanların sayısı tam 1, 7 ile bölünenlerin ve tek olanların sayısı en çok 1. On ardışık sayı içinde tam 5 tane tek sayı olduğundan ve bu 5 tek sayıdan 3,5 veya 7 ile bölünenlerin sayısı en çok 2+1+1=4<5 olduğundan, tek sayılardan en az biri 3, 5 ve 7'den hiçbiri ile bölünmez. İşte bu sayı diğerleri ile asaldır.

Üssün Üssü

S sayısını ^ işareti üssü anlamına gelecek şekilde şöyle yazalım: S = 10^{10}.(1 + 10^(10^2-10) + 10^(10^3-10) + ... + 10^(10^{10}-10)). Şimdi k≥2 için 10^k-10 = 10(10^{k-1} –1) = 10.(10-1).A = 10.9.A olduğundan (10^k-10) sayılarının hepsi 6 ile bölünür. O halde S = 10^{10}.(1 + 10^{6a} + 10^{6b} + ... + 10^{6j}) olur. Fermat Teoremine göre 10^6 = 1 (mod7) ise S = 10^{10}.(1+1+...+1) (mod 7) = 10^{10}.10 (mod 7) = 3.3^{10} (mod 7) = 3.2^5 (mod 7) = 5 (mod 7)'dir. O halde aradığımız kalan 5'tir.