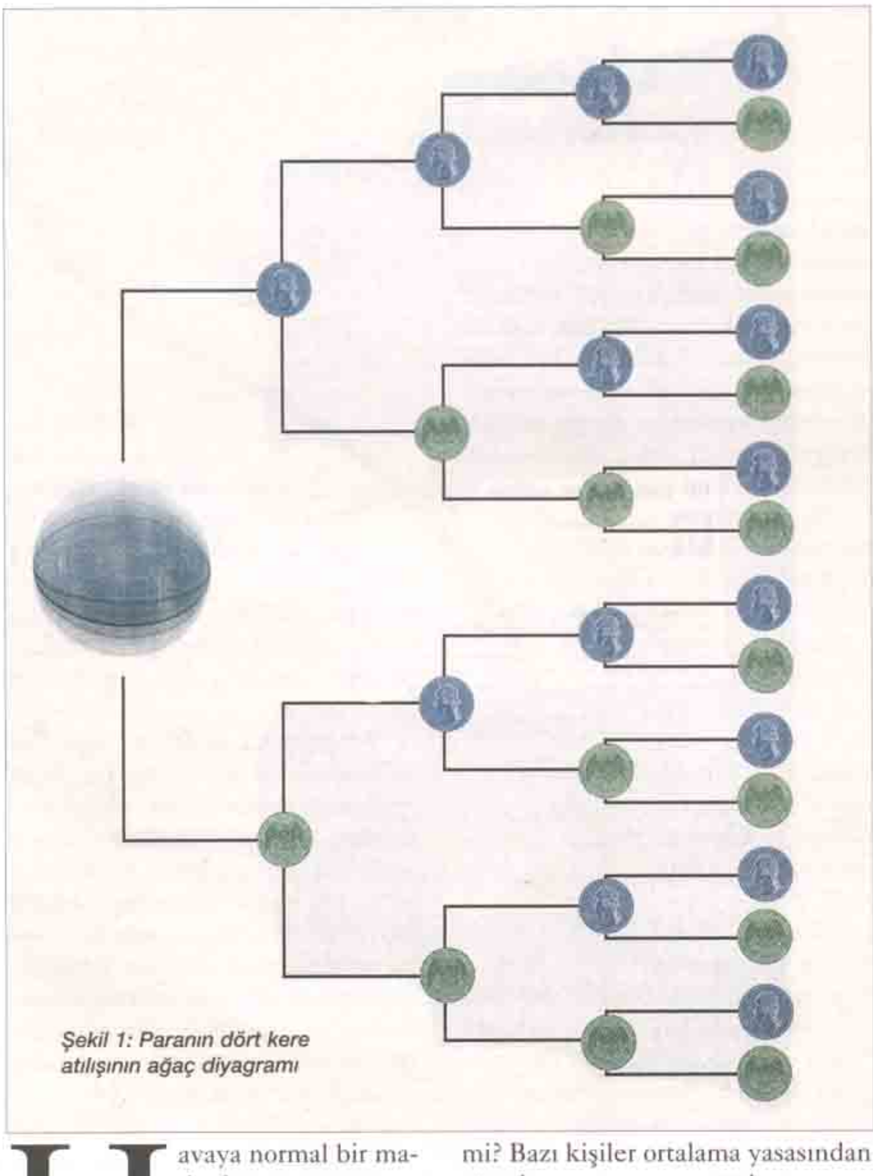
Ortalamalar Yasasını Lağvetmek



Şekil 1: Paranın dört kere atılışının ağaç diyagramı

Havaya normal bir madeni para atıyorum. Yazı veya tura gelme olasığı eşit olup 1/2 dir. Diyelim ki gelen yazı ve turaları sayıyorum ve öyle bir an geliyor ki atılan tura sayısı, yazı sayısından 100 fazla oluyor. Soru şu: para atmaya devam edersem ilerde yazı ve tura sayısı eşitleşebilir mi? Bazı kişiler ortalama yasasından sözeder ve atış sayısı arttıkça yazı ve tura sayısının eşitleşeceğini iddia eder. Diğerleri de şöyle der; "paranın belleği yoktur; yazı veya tura olasılığı hep 1/2 kalır; 100 tura ilerdeyken hiçbir zaman yazı-tura sayısı eşitleşemez".

Benzer bir durum çeşitli koşullarda ortaya çıkar. Örneğin her 4 ayda bir uçak düşüyorsa ve 3 ayda uçak düşmemişse, 4 ay içinde bir uçak düşmesi olasığı artmış mıdır?

Bütün bu gibi durumlarda yanıt "hayır"dır. Rastgele olayların, veya bu olayların standart matematik modellerinin, gerçekten belleği yoktur.

Yine de herşey eşitleşmekten ne anladığınıza bağlıdır. Turaların yazılardan 100 fazla oluşu ileride yazı gelme olasılığını tabi ki etkilemez. Öyle de olsa para atmaya devam edersek, eninde sonunda yazı ve tura sayısının eşitleşmesi olasığı 1'dir. Olasılığın 1 oluşu mutlaka (%100), sıfır oluşu olanaksız (%0) demektir.

Hemen şunu söylemeliyiz ki "uzun vadede yazı ve tura sayıları eşitlenmeyebilir" demenin de bir anlamı var; çünkü turalar yazılardan 100 fazlayken ileride tura fazlalığının 100'den en az 1 milyona yükselmesi olasılığı da tam 1'dir.

Bu çelişkiyi anlamak için yazı-tura atışlara yakından bakalım. Parayı 20 kere attım ve YYYYTYTTTTTTYYYTYYYT elde ettim; 11 yazı ve 9 tura. Büyük sayılar yasasına göre, uzun vadede bir olayın görülme sıklığı onun olasılığına çok yakındır. Burada sıklıklar 11/20 = 0.55 ve 9/20 = 0.45'dir; 0.50'ye çok yakın, fakat 0.50 değil. Belki şöyle bir sıra sizi daha memnun ederdi: TYTTYYTYYTYTTYTYTTYY; burada yazı ve tura sıklığı eşit olup 10/20 = 0.50'dir. İkinci sıra daha rastgele gözüküyor; fakat öyle değil.

Birinci sıra aynı olayın üstüste tekrarı, örneğin YYYY ve TTTTTT nedeniyle rastgele değilmiş izlenimini veriyor; ikinci sıradaysa böyle tekrarlar yok. Fakat burada sezişlerimiz bizi yanıltıyor: rastgele olaylar sıklıkla kümeleşmeler gösterir. (Ancak üstüste sürekli TTTTTTTTTTT... gelirse tabi ki paranın iki yüzünün de tura olduğunu anlarız; burada o durum yok).

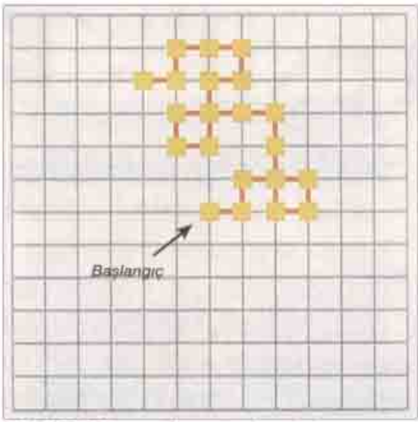
Bir parayı üstüste 4 kere atalım. Her keresinde 1/2 olasılıkla yazı ve 1/2 olasılıkla tura gelecektir. Böylece 4 atışta 16 olası durum sözkonusudur (Şekil 1). Her durumun olasılığı 1/2 x 1/2 x 1/2 x 1/2 = 1/6'dır. YYYY gelme olasılığı 1/16 ve TYTT gelme olasılığı da 1/16'dır. TYTT, YYYY'ye göre daha rastgele görülse de her ikisinin olasılığı da 1/16'dır. Bir parayı 4 kere attığınızda ortalama 2 yazı gelir. Acaba bu iki yazı ve iki tura gelmesinin en büyük olasılık olduğunu mu gösterir? Hayır. Görüldüğü gibi Y ve T, 16 farklı şekilde birbirini izleyebilir; bunların yalnız 6'sında iki Y vardır: TTYY, TYTY, TYYT, YTTY, YTYT ve YYTT. O halde 4 atışta iki yazı gelme olasılığı 6/16 = 0,375'dir. Bu 4 atışta iki yazı gelmeme olasılığı olan 1-0.375 = 0.625'den daha küçüktür. Parayı ne kadar fazla atarsak, bu etki de o kadar belirginleşir.

Bu tip araştırmalar gösterir ki ortalamalar yasası diye birşey yoktur; şöyle ki olayların gelecekteki olasılıkları, geçmişte olan şeylerden etkilenmez. Şimdi şöyle bir grafik çizelim (Şekil 2): her Y gelişte eğrimiz bir kare kenarı kadar yukarı, her T gelişte bir kare kenarı kadar aşağı gitsin. Bu gibi birbirini izleyen adımların rastgele seçildiği diyagramlara "rastgele yürüme" denir.

Şekil 3'te paranın 10 000 kere atılışını gösteren bir rastgele yürüyüş görülüyor. Bu gibi eşitliğin ileri derecede bozulduğu durumlar tamamen normaldir. Aslında parayı 10 000 kere atışta 9930 kere aynı yüzün ve yalnızca 70 kere diğer yüzün gelmesi olasılığı 1/10'dur.

Rastgele yürüme kuramı bize şunu söyler: bilançonun asla sıfır olmaması (Y'ların daima T'lardan fazla olması) olasığı sıfırdır. Ortalamalar yasası bu anlamda doğrudur; fakat Y veya T üstüne bahse giriyorsanız kazanma şansınızı arttırmaz.

Diyelim ki parayı 100 kere attınız ve 55 T ve 45 T elde ettiniz. Rastgele yürüme kuramı size şunu söyler: yeteri kadar beklerseniz bilançonun kendini düzeltme, yani Y ve T gelme sayısının eşitleşme olasılığı 1'dir (%100'dür). Peki, bu ortalamalar yasası değil mi? Hayır, bu yasa doğru bir şekilde yorumlanırsa hayır. Önceden bir sayı seçerseniz, söz gelimi paranın bir milyon kere atılışı, rastgele yürüme kuralı şunu söyler: bu bir milyon atış, daha önceki Y veya T fazlalığından etkilenmez. 55 T ve 45 Y'den sonra 1 milyon kere daha attınız diyelim. 1 000 100 atıştan ortalama 500 055'inde T ve 500 045'inde Y gelecektir. Eşitsizlik devam etmektedir. Fakat T sıklığı 55/100 = 0,55'ten 500 055/1 000 100 = 0.500005'e düşmüştür. Ortalamalar yasası eşitsizliği yokederek değil, azaltarak etkili olmuştur.



Şekil 2: İki boyutlu rastgele yürüme

Para fırlatmak yerine zar atalım. 1'den 6'ya kadar olan sayılardan birinni gelmesi olasılığı 1/6'dır. Başlangıçta her yüz 0 kere gelmiştir. Her yüzün 1 kere gelmesi için en az 6 atış gereklidir. Uzun süre zar atmaya devam edersem, her yüzün tekrar aynı sayıda gelmesi olasılığı nedir? Bunu şimdilik bir yana bırakalım; fakat bu olasılığın 1 olmadığını görelim. Bunun için rastgele yürümeyi daha fazla boyutlara genellemeliyiz. Bir düzlemde en basit rastgele yürüme sonsuz sayıda kareden oluşan bir kafesin köşelerinde yer alır. Orijinden başlanır ve doğuya, kuzeye, güneye ve batıya gidilebilir; bunların herbirinin olasılığı 1/4'dür. Şekil 2 buna iyi bir örnektir. Üç boyutlu rastgele yürüme bir küpte yapılır ve bu 4 yöne üst ve alt eklenerek yön sayısı 6'ya çıkarılır.

İki boyutlu rastgele yürümede, eğrinin orijine dönme olasılığı 1'dir. Stanislas M. Ulam (eskiden Los Alamos Ulusal Laboratuvarındaydı; H bombasını yapanlardan) üç boyutlu rastgele yürümede orijine dönme olasılığının 0.35 olduğunu kanıtladı (Eğer bir çölde kaybolursanız ve rastgele yürürseniz %100 olasılıkla bir vahaya varırsınız. Uzayda kaybolursanız rastgele hareketle Dünya'ya dönme olasılığınız %35'dir).

Bu 6 yöne zarın yüzlerindek isayıları verelim: kuzey=1, güney=2, doğu=3, batı=4, üst=5 ve alt=6. Şimdi zarı atalım ve gelen yüze göre üç boyutlu rastgele yürüyüşe yön verelim. Burada orijine dönmenin anlamı şudur: aynı sayıda 1'ler ve 2'ler; aynı sayıda 3'ler ve 4'ler ve aynı sayıda 5'ler ve 6'lar. Bunun gerçekleşme olasılığı 0.35'dir. Aynı sayıda 1'ler, 2'ler, 3ler, 4'ler, 5'ler ve 6'lar gelmes idaha az olası bir durumdur; o halde zarı n atışta n1 kere 1, n2 kere 2, n3 kere 3, n4 kere 4, n5 kere 5 ve n6 kere 6 geldiyse, n1=n2=n3=n4=n5=n6 olması olasılığı 0.35'den azdır.

Diyelim ki 1 milyon kere zar atacaksınız. Ortalama olarak zamanın yüzde kaçında tura sayısı yazı sayısından fazla olacaktır? Doğal tahmin 1/2'dir. Fakat bu doğru değildir; turaların yazılardan fazla gelmesi ya 1 milyon atış boyunca devam eder ya da hiçbir zaman turalar yazılardan fazla gelmez.

Scientific American, Nisan 1998
Çeviri: Selçuk Alsan

Şekil 3: Rastgele yürüme. Turalar yukarı, yazılar aşağı doğru adımlardır. Tura ve yazı sayıları nadiren eşit olur.