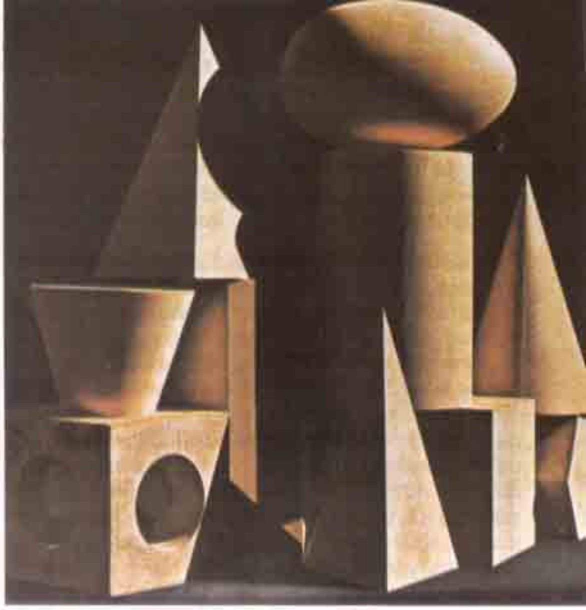
ÖKLİD UZAYLARINDA TOPOLOJİ

Prof.Dr.İ.Kaya ÖZKIN*



Mümkün olan en geniş anlamda ifade etmek gerekirse, **geometrinin** ortaya çıkışı hemen hemen insanlık tarihi kadar eskidir. Yer yüzünde yazının ve hatta belki de konuşmanın bilinmediği dönemden önce var olan geometri, insan türünün "şekilleri" tanıması ve bunların biçim ve ölçülerini karşılaştırabilme yeteneğine bağlı olarak fizikî uzay hakkında giderek yoğunlaşan bilinçaltı kavramları olarak doğmuştur. Yaklaşık İ.Ö. 600 yılına kadar olan dönemde geometrik şekiller üzerinde yapılan çalışmalar bir deneysel bilim tarzında sürüp gitmiş ve yeni buluşlar için gerekli yegâne araçlar tüme varım ve deneysel (ampirik) yöntemler olmuştur. Günlük hayatın taleplerinin gereği olarak yapılan gözlemlerden elde edilen genel özellikler ve bağıntılar bir araya getirildiğinde, alanlar, hacimler ve çeşitli şekiller arasındaki bağıntılarla ilgili heybetli bir "laboratuvar sonuçları" kümesi ortaya çıkmıştır. Bu hadsiz hesapsız geniş ampirik bilgi kümesini, bugün Öklid geometrisi olarak bilinen, çok güzel ve akılcı bir disipline dönüştürenler Eski Yunanlılardır. Bu dönüşümün tamamlanması yaklaşık üç yüzyıl sürerek İ.Ö. 300 dolaylarında Öklid'in "Elements" adlı eseri ile zirvesine ermiştir. Matematiğin gelişimi açısından bu olayın önemini vurgulamakta yarar vardır. Öklid'in bu alandaki etkisi o kadar kesin olmuştur ki, 17. yüzyıla kadar matematikçiler kendilerini yeterlikli görüp geometride esaslı yeni yaklaşımları benimseyen davranışlardan kaçınmışlardır. Çok yavaş olarak ve zaman zaman da isteksiz bir biçimde matematik, kendisini Öklid'in "Elements" eserindeki katı aksiyomatik yöntemlerin baskı ve zorlamalarından bağımsız hissetmeye başlamıştır. Yeni ve dikkate değer güçte kavram ve tekniklerin geliştirilmesi sonucunda, genel olarak matematiğin tamamında ve özellikle de geometride hem daha kapsamlı hem de daha iyi anlaşılır bir duruma gelinebilmiştir. İşte, bu kısa yazının amacı, kapsamı bu anlamda giderek genişleyen matematikte geometrinin bir dalı olarak **topolojinin** nasıl doğduğunu ve geliştiğini belirtmektir.

Öklid'in "Elements" adlı eserinin ilk kitaplarında yer alan en temel kavram **eşleşimdir**. Bu kavramı sezgisel olarak ifade etmek gerekirse, düzlemde bulunan iki geometrik şeklin (bizim bakış açımızdan düzlemin herhangi iki altkümesinin) eşleşik olabilmesi için gerek ve yeter koşul, bunların sadece düzlemde işgal ettikleri yer itibarıyla birbirinden farklı olmalarıdır. Eşdeğer başka bir ifadeyle, düzlemde ötelenme ve/veya dönme gibi katı hareketlerle bu iki geometrik şekil çakıştırılabilirse, bu durumda şekiller **eşleşiktir** denir. Şimdi ise bu kavramın daha kesin bir tanımını verelim: F_1 ve F_2 düzlemde bulunan herhangi iki geometrik şekil olsun. Eğer düzlemi kendi üzerine dönüştüren bir f dönüşümü varsa ve f, düzlemin her nokta çifti arasındaki uzaklığı koruyup (yani düzlemde bulunan tüm p ve q noktaları için $d(f(p), f(q)) = d(p, q)$ ise), ayrıca F_1 i F_2 üzerine taşıyorsa (yani $f(F_1) = F_2$ ise), bu durumda F_1 ve F_2 şekilleri **eşleşiktir** denir. Herhangi nokta çifti arasındaki uzaklığı koruyan bir dönüşüme **izometri** adı verilir. Katı hareketin (yani ötelenme, dönme veya bunların bileşkesinden oluşan hareketin) matematiksel karşılığı izometridir. Bu nedenden dolayıdır ki, düzlemde eşleşik şekillerin incelenmesine genellikle "Düzlem Öklidyen Metrik Geometrisi" denir. Düzlemde bir dik Kartezyen koordinat sisteminin çizilmesi durumunda düzlemin izometrileri,

$$(1)\qquad \begin{aligned} x' &= Ax + By + C \\ y' &= \pm(-Bx + Ay) + D \end{aligned}$$

olmak üzere, $(x, y) \to (x', y')$ biçimindeki dönüşümlerdir; A, B, C ve D gerçel sabitler olup, $A^2 + B^2 = 1$ dir. Burada herhangi iki izometrinin bileşkesinin de bir izometri olduğuna dikkat edilmelidir. Üstelik böyle her bir izometrinin tersi de var olup, bu da bir izometridir. Dolayısıyla (1) biçimindeki tüm dönüşümlerden oluşan küme, bileşke işlemine göre bir gruptur ve buna **düzlemsel izometrilerin grubu** adı verilir. Düzlem Öklidyen metrik geometrisi bakış açısından ifade etmek gerekirse, herhangi bir F geometrik şekli için önemli olan yegâne özellikler, F nin sahip olduğu birtakım özelliklere, F ye eşleşik olan diğer tüm geometrik şekillerin de sahip olmasıdır; yani düzlemsel izometrilerin grubu altında değişmez kalan özelliklerdir. Örneğin, bir doğru olma özelliği böyle bir özelliktir. Çünkü (1) biçimindeki her dönüşüm, doğruları doğrulara dönüştürmektedir. Benzer şekilde bir kare veya daha genel olmak üzere, özel türden bir poligon olma özelliği de düzlemsel izomet-

* *Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü.*

rilerin grubu altında değişmez kalmaktadır. Aynı şeyi özel türden konikler için de söyleyebiliriz. Bir doğru parçasının uzunluğu, bir poligonun alanı ve bir koniğin dış merkezliği aynı veçhile değişmez kalan özelliklerden olup, düzlem Öklidyen metrik geometrisinde incelenmesi gereken konular arasındadır.

Tabiatıyla konuya sadece düzlem Öklidyen metrik geometri açısından bakılamaz. Nitekim "Elements"'in VI. Kitabında Öklid, incelemelerini eşleşik geometrik şekillerden **benzer** geometrik şekillere kaydırmıştır. Kabaca ifade etmek gerekirse, aynı biçimde fakat farklı ölçülerde olan herhangi iki geometrik şekil benzerdir denir. Bu kavramın tanımını daha kesin bir biçimde formüle edebilmek için, önce aşağıdaki özel dönüşümü tanımlamakta yarar vardır: Eğer düzlemi kendi üzerine dönüştüren bir f dönüşümü altında düzlemin her nokta çifti arasındaki uzaklık, k bir pozitif sabit sayı olmak üzere, k katına çıkıyorsa (yani düzlemde bulunan tüm p ve q noktaları için $d(f(p), f(q)) = kd(p, q)$ oluyorsa), bu durumda f ye **benzerlik oranı k olan benzerlik dönüşümü** denir. Bir dik Kartezyen koordinat sistemine göre bu gibi her $(x, y) \rightarrow (x', y')$ dönüşümü

$$(2) \quad \begin{aligned} x' &= ax + by + m \\ y' &= \pm(-bx + ay) + n \end{aligned}$$

biçiminde olup, burada a, b, m, n gerçel sabitler ve $(a^2 + b^2)^{1/2} = k$'dir. Buna göre, F_1 ve F_2 gibi iki geometrik şeklin benzer olabilmesi için, düzlemi kendi üzerine dönüştüren ve F_1 i F_2 üzerine taşıyan bir benzerlik dönüşümünün bulunması gerekir. Tüm benzerlik dönüşümlerinin kümesi, bileşke işlemine göre bir gruptur. Dolayısıyla artık bu aşamada, **düzlem Öklidyen benzerlik geometrisi,** geometrik şekillerin bu grup altında değişmez kalan özelliklerini inceler diye tanımlanabilir; yani bir geometrik şeklin sahip olduğu birtakım özelliklere, bu şekle benzer olan diğer tüm geometrik şekillerin de sahip olması durumudur. Her izometri, aynı zamanda bir benzerlik dönüşümü olduğuna göre (k = 1 alınmak koşulu ile), düzlemsel izometrilerin grubu altında da bu gibi özellikler değişmez kalacaktır. Fakat bunun karşıtı doğru değildir; örneğin bir doğru parçasının uzunluğu veya bir poligonun alanı tüm benzerlik dönüşümleri tarafından korunamaz.

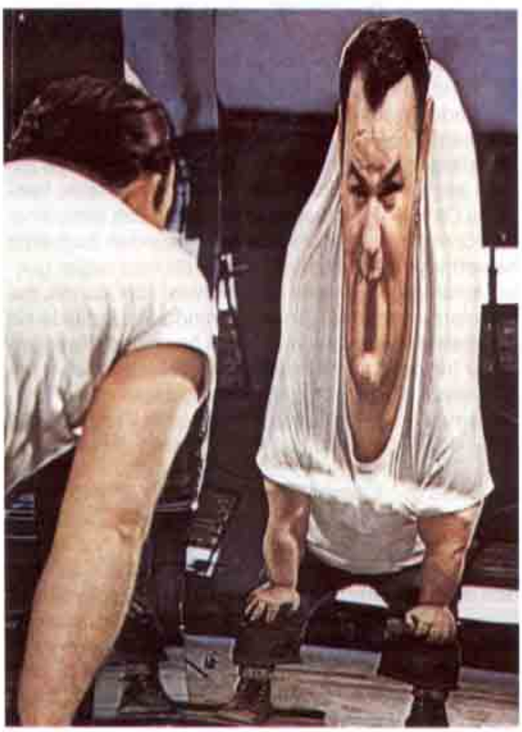
Buraya kadar üzerinde durduğumuz her iki geometride de, geometrik şekillerin belirli özellikleri ile ilgilenip diğerlerini göz ardı ettiğimize dikkat edilmelidir. Düzlem Öklidyen metrik geometrisinde verilen bir şeklin biçim ve ölçüsü üzerinde durulurken, bunun düzlemdeki konumu ile ilgilenilmemiş, benzerlik geometrisinde ise şeklin yalnız biçimi göz önünde tutulmuştur. Önemli olduğunu kabul ettiğimiz bu özellikler, tamamen uygulamak üzere tercih edilen özel bir araştırma biçimine bağımlıdır. Geometrik şekillerin benzerlik dönüşümleri altındaki biçim değişikliğinin izometrilere göre daha etkin olduğu açıkça bellidir. Fakat geometrik şekillerin biçim değişikliğine neden olabilen dönüşümler altında değişmez kalan özelliklerin incelenmesi tercih edildiğinde, bu ek özelliğin o anda önemi kalmaz. Doğal olarak, geometrik şekillerin izin verilebilen biçim değişikliği derecesinin önemli olduğu inceleme alanları da vardır. Örneğin, bir geometrik şeklin **düzlem projektif dönüşümlerinin** kümesi altında değişmez kalan özellikleri matematiksel analiz bakış açısından hayli ilginçtir. Dik Kartezyen koordinat sistemine göre bir $(x, y) \rightarrow (x', y')$ düzlem projektif dönüşüm

$$(3) \quad \begin{aligned} x' &= \frac{a_1 x + a_2 y + a_3}{c_1 x + c_2 y + c_3} \\ y' &= \frac{b_1 x + b_2 y + b_3}{c_1 x + c_2 y + c_3} \end{aligned}$$

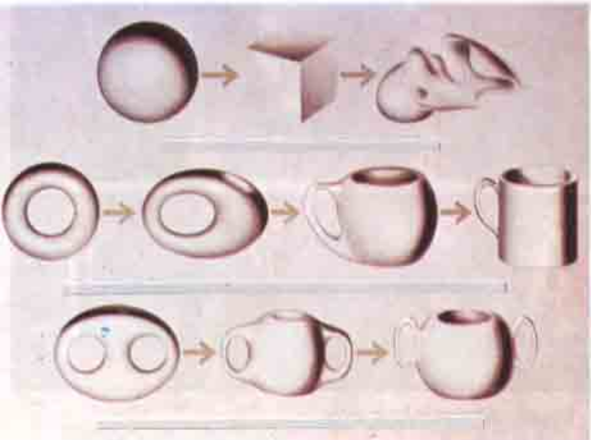
biçiminde olup, burada gerçel sayılardan oluşan katsayılar determinantı

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ dır.}$$

Tüm bu tür dönüşümlerden oluşan küme, bileşke işlemine göre bir gruptur. Geometrik şekillerin bu grup altında değişmez kalan özelliklerinin incelendiği dala **düzlem projektif geometri** adı verilir. Şimdi düzlemde iki geometrik şekil düşünelim. Eğer bu şekillerden birini diğeri üzerine taşıyan bir projektif dönüşüm varsa, bu durumda şekiller **projektif olarak eşdeğerdir** denir. Her benzerlik dönüşümü aynı za-



Yüzün topolojisi.

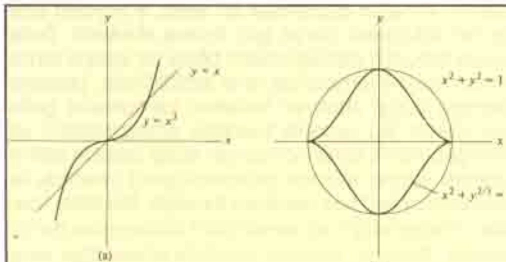


Geometrik şekillerde yeni noktalar oluşturmadan (örneğin şekli yırtmadan), çakıştırmadan (örneğin şekli kıvırmadan) gerçekleştirilen deformasyonlar.

manda bir projektif dönüşüm olduğuna göre, projektif grup altında değişmez kalan her özellik, aynı zamanda benzerlik grubu altında değişmez kalan bir özelliktir. Projektif dönüşümler altında şekillerin uğradığı biçim değişiklikleri benzerlik dönüşümlerine göre daha fazla olduğu için, yukarıdaki hükmün karşıtı doğru değildir. Örneğin herhangi iki konik daima projektif olarak eşdeğerdir; fakat bunların benzer olabilmeleri için aynı dışmerkezliğe sahip olmaları gerekir.

Burada sözünü ettiğimiz çeşitli geometrik yaklaşımlar oldukça yenidir. İlk kez Felix Klein, 1872 yılında yayınladığı ünlü **Erlanger Programında** geometriyi, genel olarak bir S kümesinin, S nin özel dönüşümler grubu altında değişmez kalan özellikleri olarak tanımlamıştır. Düzlem Öklidyen metrik, benzerlik ve projektif geometriler ile bunların üç ve daha yüksek boyutlu uzaylara genelleştirilmeleri Klein'ın tanımına uydukları gibi, klâsik Öklid geometrisinin çeşitli diğer dalları da bu tanımı sağlamaktadır. Bu gerçeğe rağmen, içinde bulunduğumuz yüzyılda geometri ile ilgili düşünceler o kadar ileri giderek genişlemiştir ki - şüphesiz bu gelişmeye Erlanger Programındaki fikirlerin yorumlanmasının büyük etkisi olmuştur-bugünkü kapsamıyla bunları tam olarak Klein anlamında "geometriler" olarak göz önüne almak mümkün değildir. Klein'ın önemle vurguladığı dönüşüm gruplarının değişmezleri üzerindeki çalışmalarının teorik fizikte de son derece derin etkileri olmuştur. Örneğin özel rölativite teorisi, Minkowski uzayında dönüşümlerin Lorentz grubunun değişmezleri olarak göz önüne alınabilir.

Riemann'ın karmaşık fonksiyonlar teorisindeki çalışmalarının önemini anlayarak bunları değerlendiren Klein, bir geometrik şekilde yeni noktalar oluşturmadan veya mevcut noktaları çakıştırmadan geometrik şeklin biçiminin bozulması (deforme edilmesi) - yani, sanki şekli yırtmadan veya kıvırmadan şeklin eğilmesi, sündürülmesi, büzülmesi - durumunda şeklin değişmez kalan özellikleri ile ilgilenen geometrinin yeni bir dalının, **topolojinin** varlığını ilk farkedenlerdendir. Bir geometrik şeklin yukarıda ifade edildiği gibi biçiminin bozulması olayı, ancak bire-bir, örten ve kabaca söylemek gerekirse, birbirine yakın noktaları, yakın noktalara dönüştüren, yani sürekli bir dönüşüm ile gerçekleştirilebilir. Bu durumda iki boyuttaki söz konusu dönüşümler grubu, **düzlemin topolojik dönüşümleri** veya **homeomorfizmleri** adı verilen ve düzlemi kendi üzerine dönüştüren bire-bir, sürekli ve tersi de sürekli olan dönüşümlerin kümesidir. Örneğin, düzlemi kendi üzerine dönüştüren ve $f(x, y) = (x, y^3)$ olarak verilen bire-bir f dönüşümünü göz önüne alalım. Bu durumda f ve tersi $f^{-1}(x, y) = (x, y^{1/3})$ de sürekli olduğundan f, düzlemin bir homeomorfizmidir. Acaba düzlemde bulunan bir geometrik şeklin hangi tip özellikleri f altında korunur? Denklemi $y = x$ olan bir doğrunun f altındaki görüntüsü $y = x^3$ eğrisi olduğuna göre (Şekil 1 (a)), doğru olma özelliğinin korunmadığı kesindir. Ayrıca f, $x^2 + y^2 = 1$ çemberini $x^2 + y^{3/2} = 1$ eğrisi üzerine dönüştürdüğünden (Şekil 1 (b)), konik olma özelliği de korunmamaktadır.



Şekil 1(a) ve 1(b)

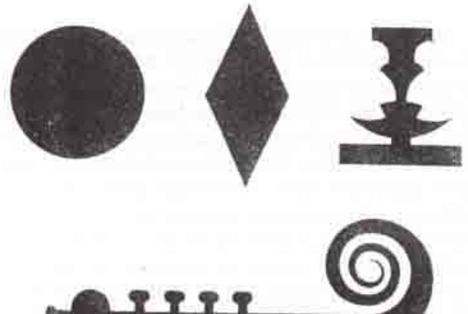
Şekillerin çeşitli biçim bozuklukları ile ilgili incelemeler yapabilmek için topolojik dönüşümlerin yeterli olduğunu söyleyebiliriz. Gerçekten, özelliklerini yakından tanıdığımız pek çok geometrik şekil, hayli basit f topolojik dönüşümleri altında biçim bozulmalarına uğrayabilirler. Fakat bununla beraber f, geometrik şekillerin fazla bilinmeyen pek çok önemli özelliklerini de koruyabilmektedir. Örneğin, bir doğrunun söz konusu f dönüşümü altındaki görüntüsü bir doğru değildir; ancak bu görüntü "bir-boyutlu" ve tek parçadan ibaret, yani "bağlantılı" olmak durumundadır. Ayrıca $x^2 + y^2 = 1$ çemberinin $f(x, y) = (x, y^3)$ olarak verilen f topolojik dönüşümü altındaki görüntüsünün bir konik olmadığı belirtilmişti. Fakat burada çember ve görüntüsü "basit kapalı eğri"(*) olma ortak özelliğini paylaşmaktadırlar. Düzlemde bulunan geometrik şekillerin, düzlemin topolojik dönüşümlerinin grubu altında değişmez kalan bu gibi özelliklerine **has olmayan topolojik özellikler** denir.

Geometri kökenli topoloji son yüz senede hızla gelişerek bugün analiz ve cebirin yanı başında yer

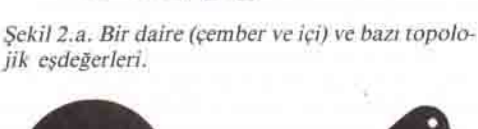
(*) Kendisini kesmeyen kapalı eğrilere, ***basit kapalı eğriler*** *denir.*

- *Ceketinizi çıkarmadan yeleğinizi çıkarabilir misiniz? - Uygun dönüşümlerle evet.*

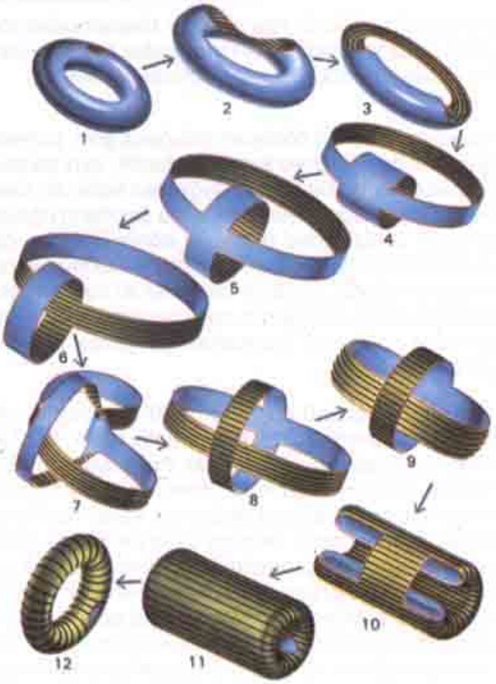
lendiği bir bilim dalı olarak en basit biçimde tanımlanabilir. Burada bu konuya bu şekilde yaklaşımımız, olabileceğinden daha az genel olmakla beraber, bir dereceye kadar da yukarıda özetlendiğinden daha geneldir. İçinde geometrik şekillerin yer aldığı düşünülen çevre uzayı, geniş ölçekte herhangi bir uzay olabilir; örneğin düzlemsel bir şekil, 3 boyutlu uzayın bir altkümesi olarak göz önüne alınabilir. Dolayısıyla topolojik dönüşümlerin böyle bir uzayın tamamında tanımlı olmasında ısrar edildiğinde, çalışmalarımıza doğal olmayan birtakım kısıtlamalar getirmiş oluruz. Bu nedenle topolojik dönüşümlerin verilen geometrik şeklin içinde yer aldığı uzayda tanımlanması yerine, sadece geometrik şekil üzerinde tanımlanması ile "has olmayan topolojik özellikler"den alan, matematiğin en temel bilim dallarından biri olmuştur. Kabaca, topoloji, özellikle sürekliliğin ince-



Şekil 2.a. Bir daire (çember ve içi) ve bazı topolojik eşdeğerleri.



Şekil 2.b. Bir halka ve topolojik eşdeğeri.



Esnek bir lastik tüpün (topolojik dönüşümlerle) tersyüz edilmesi.

ziyade "has topolojik özelliklerin" araştırmasına yönelmiş oluruz. Bir geometrik şeklin, içinde bulunduğu uzaya bağımlı olmayan özelliklerine **has topolojik özellikler** denir. □

KAYNAKLAR

1. Bergamini, D., "Mathematics" Life Science Library 1970.
2. Gans, D., "Transformations and Geometry", Appleton-Century-Crofts Meredith, New York, 1969.
3. Henle, M., "A Combinatorial Introduction to Topology", W.H.Freeman and Company, San Francisco, 1979.
4. Naber, G.L., "Topological Methods in Euclidean Spaces", Cambridge University Press, Cambridge, 1980.