

MATEMATİK OLİMPİYADINA HAZIRLIK

Prof. Dr. Berki YURTSEVER

Sevgili okuyucular,

Matematik olimpiyadına hazırlık için yayınlamakta olduğumuz problem takımlarının bu sayıda dördüncüsünü sunuyoruz. Çözüm anahtarını bundan sonraki sayıda bulacaksınız. Çoğunuzun bu problemlerle uğraştığını ummaktayız, fakat soruları nasıl bulduğunuz, çözümlerinde zorluk çekip çekmediğinizi bilmiyoruz. Bunları, ve eğer konu ile ilgili başka istekleriniz varsa onları da, lütfen bize yazınız. Yeteneklerinizi geliştirmek, amacımızdır.

Prof. Dr. Berki YURTSEVER

I. KISIM

1. a/b ($a \neq b$, $b \neq 0$) kesrinin pay ve paydasına x eklendiğinde kesrin değeri c/d oluyor. Buna göre x aşağıdakilerden hangisine eşittir ?

(A) $\frac{1}{c-d}$ (B) $\frac{ad-bc}{c-d}$ (C) $\frac{ad-bc}{c+d}$
(D) $\frac{1}{bc-ad}$ (E) $\frac{1}{bc+ad}$

2. Bir eşya eğer x liraya satılırsa alış fiyatının % 15 i kadar zarar ediliyor. Eğer y liraya satılırsa alış fiyatının % 15 i kadar kâr ediliyor. $y : x$ oranı aşağıdakilerden hangisine eşittir ?

(A) $23/17$ (B) $17y/23$ (C) $23x/17$
(D) Alış fiyatına bağlıdır (E) Hiçbiri

3. Eğer N sayısının 2 tabanına göre yazılışı 11000 ise N den bir önceki tamsayının 2 tabanına göre yazılışı nedir ?

(A) 10001 (B) 10010 (C) 10011
(D) 10110 (E) 10111

4. Bir $*$ ikili işlemi, tamsayı ikilileri üzerinde $(a, b) * (c, d) = (a - c, b + d)$ şeklinde tanımlanıyor. Eğer $(3, 2) * (0, 0)$ ile $(x, y) * (3, 2)$ aynı ikiliyi gösteriyorlarsa x kaçtır ?

(A) -3 (B) 0 (C) 2 (D) 3 (E) 6

5. Sıfırdan farklı bir N sayısından, bu sayının çarpmaya göre tersinin 4 katı çıkarılırsa verilen bir R sabit reel sayısına eşit oluyor. Buna göre verilen bu R için, bu şartı sağlayan N sayılarının toplamı nedir ?

(A) $1/R$ (B) R (C) 4 (D) $1/4$ (E) $-R$

6. Aynı merkezli iki çember arasında kalan halkanın alanı $12 \frac{1}{2} \pi$ cm² dir. Büyük çemberin küçük çembere teğet olan bir kirişi kaç cm. dir.

(A) $5/\sqrt{2}$ (B) 5 (C) $5\sqrt{2}$ (D) 10
(E) $10\sqrt{2}$

7. $(1, y_1)$ ve $(-1, y_2)$, $y = ax^2 + bx + c$ nin grafiğine ait iki nokta olsun. Eğer $y_1 - y_2 = -6$ ise, b aşağıdakilerden hangisine eşittir ?

(A) -3 (B) 0 (C) 3 (D) \sqrt{ac} (E) $-\frac{a+c}{2}$

8. Bir çemberin içine, köşeleri bu çember üzerinde olacak şekilde, bir ABC üçgeni çiziliyor. Üst üste gelmeyen AB, BC ve CA yaylarının ölçüleri, sırası ile, $x + 75^\circ$, $2x + 25^\circ$ ve $3x - 22^\circ$ dir. Buna göre, ABC üçgeninin iç açılarından birinin derece olarak ölçüsü aşağıdakilerden hangisidir ?

(A) $57 \frac{1}{2}$ (B) 59 (C) 60 (D) 61 (E) 122

9. 2 den başlayan ardışık 52 tane tamsayının aritmetik ortalaması aşağıdakilerden hangisidir ?

(A) 27 (B) $27 \frac{1}{4}$ (C) $27 \frac{1}{2}$ (D) 28

(E) $28 \frac{1}{2}$

10. Bir çemberden ve bu çemberin paralel iki teğetinden eşit uzaklıkta bulunan noktaların sayısı kaçtır ?

(A) 0 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) sonsuz

II. KISIM

11. xy - düzleminde $P(-1, -2)$ ve $Q(4, 2)$ noktaları ile $PR + RQ$ minimum olacak şekilde bir $R(1, m)$ noktası alınıyor. Buna göre m aşağıdakilerden hangisidir ?

(A) $-3/5$ (B) $-2/5$ (C) $-1/5$ (D) $1/5$
(E) $-1/5$ veya $1/5$ den biri

12. $F = \frac{1}{6} (6x^2 + 16x + 3m)$ ifadesi x 'e

göre lineer olan bir ifadenin karesidir. Buna göre, m nin sahip olduğu özel değer hangi sayılar arasındadır ?

(A) 3 ve 4 (B) 4 ve 5 (C) 5 ve 6
(D) -4 ve -3 (E) -6 ve -5

13. r yarıçaplı bir çember R yarıçaplı başka bir çemberin sınırladığı bölge içindedir. Büyük çemberin sınırladığı alan, küçük

çemberin dışında ve büyük çemberin içinde kalan alanın a/b katıdır. R : r oranını hesaplayınız.

- (A) $\sqrt{a/\sqrt{b}}$ (B) $\sqrt{a/\sqrt{a-b}}$
 (C) $\sqrt{b/\sqrt{a-b}}$ (D) $a/\sqrt{a-b}$
 (E) $b/\sqrt{a-b}$

14. $\frac{x^2-4}{x^2-1} > 0$ eşitsizliğini sağlayan bütün x değerlerinin cümlesi aşağıdakilerden hangisidir ?

- (A) $\{ x : x > 2 \text{ veya } x < -2 \text{ yahut } -1 < x < 1 \}$
 (B) $\{ x : x > 2 \text{ veya } x < -2 \}$
 (C) $\{ x : x > 1 \text{ veya } x < -1 \}$
 (D) $\{ x : x > 1 \text{ veya } x < -1 \}$
 (E) $\{ x : x \in \mathbb{R}, x \neq 1 \text{ veya } x \neq -1 \}$

15. O merkezli r yarıçaplı bir çemberin, uzunluğu r olan, bir AB kirişi çiziliyor. O dan AB ye çizilen dik, AB doğru parçasını M de, M den OA ya çizilen dik de OA yı D de kesiyor. MDA üçgeninin alanını r cinsinden hesaplayınız.

- (A) $\frac{3r^2}{16}$ (B) $\frac{\pi r^2}{16}$ (C) $\frac{\pi r^2 \sqrt{2}}{8}$
 (D) $\frac{r^2 \sqrt{3}}{32}$ (E) $\frac{r^2 \sqrt{6}}{48}$

16. $(a-b)^n$, $(n \geq 2, ab \neq 0)$ binom teoremine göre açıldığında, k pozitif bir tamsayı olmak üzere, a = kb konduğu zaman ikinci ve üçüncü terimlerin toplamı sıfır olmaktadır. Buna göre n aşağıdakilerden hangisine eşittir ?

- (A) $\frac{1}{2} k (k-1)$ (B) $\frac{1}{2} k (k+1)$
 (C) $2k-1$ (D) $2k$ (E) $2k+1$

17. Aşağıdakilerden hangisi $2^{2x} - 8 \cdot 2^x + 12 = 0$ denkleminin bir köküdür ?

- (A) $\log 3$ (B) $\frac{1}{2} \log 6$ (C) $1 + \log \frac{3}{2}$
 (D) $1 + \frac{\log 3}{\log 2}$ (E) Hiçbiri

18. $(x-y+2)(3x+y-4) = 0$ in grafiği ile $(x+y-2)(2x-5y+7) = 0$ in grafiğinin kaç ortak noktası vardır ?

- (A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 16 (E) sonsuz

19. x ve y, $x^4 y^4 - 10x^2 y^2 + 9 = 0$ denklemini sağlayan pozitif tamsayılar olduğuna göre kaç tane farklı (x, y) sıralı çifti vardır ?

- (A) 0 (B) 3 (C) 4 (D) 12 (E) Sonsuz

20. 3 659 893 456 789 325 678 sayısı ile 342 973 489 379 256 sayısının çarpımı P olsun. P kaç rakamlı bir sayıdır ?

- (A) 36 (B) 35 (C) 34 (D) 33 (E) 32

III. KISIM

21. $x + y = \sqrt{2m}$ doğrusununun $x^2 + y^2 = m$ eğrisine teğet olması için m ne olmalıdır ?

- (A) 1/2 (B) $1/\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) 2
 (E) negatif olmayan herhangi bir reel sayı.

22. x — eksenini, x = 8 doğrusu ve

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 5 \\ 2x-5 & 5 \leq x \leq 8 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan eğri tarafından sınırlanan bölgenin alanı K olsun. K aşağıdakilerden hangisidir ?

- (A) 21,5 (B) 36,4 (C) 36,5 (D) 44
 (E) 44 den küçük fakat 44'e istenildiği kadar yakın.

23. $n > 1$, herhangi bir tamsayı olsun. $n! + 1$ den büyük, $n! + n$ den küçük olan kaç tane asal sayı vardır ?

- (A) 0 (B) 1 (C) n çift ise $n/2$, n tek ise $(n+1)/2$ (D) $n-1$ (E) n

1) n! sembolü 1.2.3... (n-1) n çarpımını göstermektedir. Örneğin $5! = 1.2.3.4.5 = 120$ dir.

24. $P > P'$ şartını sağlayan P ve P' doğal sayıları D doğal sayısına bölündüğünde, sırası ile, R ve R' kalanlarını vermektedirler. PP' ve RR' sayıları D ye bölündüklerinde, sırası ile, r ve r' kalanlarını verdiklerine göre, r ve r' için aşağıdakilerden hangisi doğrudur ?

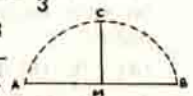
- (A) daima $r > r'$ dür,
 (B) daima $r < r'$ c
 (C) bazan $r > r'$, bazan $r < r'$ dür,
 (D) bazan $r > r'$, bazan da $r = r'$ dür,
 (E) daima $r = r'$ dür.

25. $\log_2 a + \log_2 b \geq 6$ olduğu biliniyor. a + b nin alabileceği en küçük değer aşağıdakilerden hangisidir ?

- (A) $2\sqrt{6}$ (B) 6 (C) $8\sqrt{2}$ (D) 16
 (E) Hiçbiri

26. Bir parabol yayının yüksekliği 16 cm. açıklığı 40 cm. dir. M merkezinden 5 cm. uzaklıkta yayın yüksekliği kaç cm. dir ?

- (A) 1 (B) 15 (C) $15 \frac{1}{3}$
 (D) $15 \frac{1}{2}$ (E) $15 \frac{3}{4}$



27. Hareket halindeki bir cismin hızı, ikinci ve daha sonra gelen kilometreler için, o ana kadar alınmış yolun kilometre tamsayısı ile ters orantılı olarak değişmektedir. Sonra gelen her kilometre için cismin hızı sabittir. Eğer cisim ikinci

kilometreyi 2 saatte aldı ise, n ninci kilometreyi kaç saatte alır ?

- (A) $\frac{2}{n-1}$ (B) $\frac{n-1}{2}$ (C) $\frac{2}{n}$
 (D) $2n$ (E) $2(n-1)$

28. Yarıçapı 1 olan bir çemberin sınırladığı bölge içinde, çember çapının uc noktalarına olan uzaklıklarının kareleri toplamı 3 olan noktaların sayısını bulunuz.

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) sonsuz

$$\frac{1}{t-1} \quad \frac{t}{t-1}$$

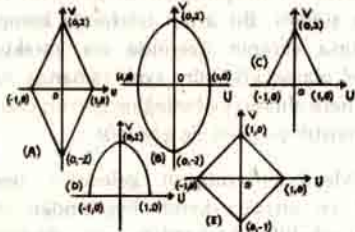
29. Eğer $x = t$ ve $y = t$ ($t > 0, t \neq 1$) ise x ile y arasında aşağıdaki bağıntılardan hangisi vardır ?

- (A) $y^x = x$ (B) $y = x^y$
 (C) $y^x = x^y$ (D) $x^x = y^y$ (E) hiçbirisi

30. P, ABC ikizkenar dik üçgeninin AB hipotenüsü (veya uzantısı) üzerinde bir nokta olsun. $s = AP^2 + PB^2$ ise aşağıdakilerden hangisi doğrudur ?

- (A) P'nin sonlu sayıdaki durumları için $s < 2 \cdot CP^2$ dir,
 (B) P'nin sonsuz sayıdaki durumları için $s < 2 \cdot CP^2$ dir,
 (C) Yalnız P, AB'nin orta noktası veya AB'nin bir uc noktası olması halinde $s = 2 \cdot CP^2$ dir,
 (D) Daima $s = 2 \cdot CP^2$ dir.
 (E) Eğer P, AB'yi üç eşit parçaya ayıran noktalardan biri ise $S > 2 \cdot CP^2$ dir.

31. xy — düzleminde, köşeleri $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,1)$ ve $C(0,1)$ olan bir OABC birim karesi veriliyor. $u = x^2 - y^2$ ve $v = 2xy$, xy — düzleminin uv — düzlemine bir dönüşümü olsun. OABC karesinin görüntüsü (resmi) aşağıdakilerden hangisidir ?



32. $\{u_n\}$ dizisi $u_1 = 5$ ve $u_n + 1 - u_n = 3 + 4(n-1)$, $n = 1, 2, \dots$ şeklinde tanımlanıyor. u_n , n nin bir polinomu olarak ifade edildiğinde bu polinomun katsayılarının cebirsel toplamı nedir ?

- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 11

33. S_n ve T_n iki aritmetik serinin ilk n terim-

leri toplamı olsunlar. Eğer her n için $S_n : T_n = (7n + 1) : (4n + 27)$ ise birinci serinin onbirinci teriminin, ikinci serinin onbirinci terimine oranı nedir ?

- (A) $4/3$ (B) $3/2$ (C) $7/4$ (D) $78/71$
 (E) hesaplanamaz.

34. x^{100} ifadesi $x^2 - 3x + 2$ ye bölündüğünde, derecesi 2 den küçük olan R kalanı elde ediliyor. R aşağıdakilerden hangisi ile ifade edilebilir ?

- (A) $2^{100} - 1$
 (B) $2^{100}(x-1) - (x-2)$
 (C) $2^{100}(x-3)$
 (D) $x(2^{100}-1) + 2(2^{99}-1)$
 (E) $2^{100}(x+1) - (x+2)$

35. $L(m)$, $y = x^2 - 6$ ve $y = m$ grafiklerinin kesim noktalarından solda olanının apsisi olsun. $-6 < m < 6$ ve

$$r = \frac{1}{m} [L(-m) - L(m)]$$

ise, m istenildiği kadar sıfıra yaklaştığında, r nin değeri için aşağıdakilerden hangisi doğrudur ?

- (A) Sıfıra yaklaşır
 (B) $1/\sqrt{6}$ ya yaklaşır
 (C) $2/\sqrt{6}$ ya yaklaşır
 (D) Sınırsız olarak artar
 (E) Hesaplanamaz.

GEÇEN SAYIDAKİ SORULARIN CEVAPLARI

1 - D	8 - B	15 - D	22 - E	29 - A
2 - B	9 - E	16 - E	23 - B	30 - A
3 - A	10 - C	17 - C	24 - C	31 - D
4 - C	11 - B	18 - D	25 - C	32 - C
5 - A	12 - C	19 - E	26 - E	33 - A
6 - E	13 - B	20 - A	27 - B	34 - B
7 - E	14 - E	21 - D	28 - D	35 - D

SUBAT SAYISI İLE İLGİLİ BİR DÜZELTME :

Problem 25

$$\frac{1}{2} (P-1)$$

(A) $(p-1)$ — 1, $p-2$ ile bölünür,

$$\frac{1}{2} (P-1)$$

(B) $(p-1)$ + 1, p ile bölünür,

$$\frac{1}{2} (P-1)$$

(C) $(p-1)$ p ile bölünür,

$$\frac{1}{2} (P-1)$$

(D) $(p-1)$ + 1, $p+1$ ile bölünür,

$$\frac{1}{2} (P-1)$$

(E) $(p-1)$ — 1, $p-1$ ile bölünür.