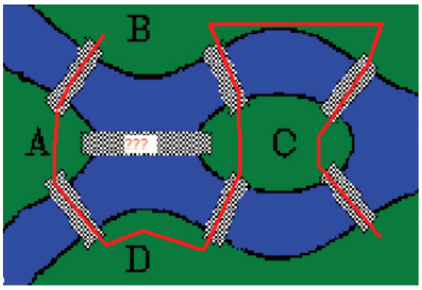
MATEMATİKTE ÇİZGE KURAMI - I

MATEMATİKSEL MODELLEME ÖRNEKLERİ

Gerçek hayatta ya da bir kitapta karşılaştığınız bir meselenin bir matematik problemi olup olmadığını hemen anlayabilir misiniz? Bir matematik ders kitabının konu sonu alıştırmalarının matematiğin kapsamına girdiği açık. Peki ya günlük hayatta öyle karşınıza aniden çıkabilecek ve sizin vereceğiniz kararlar doğrultusunda sonuçlanacak problemlerin size sezdirmeden matematiksel çözümler gerektirmesi mümkün mü?

Uzun bir kıştı ve nihayet bitti. Yaz geldi, havalar da güzelleşti. Akşamüstü güneş batarken esen ılık rüzgarın serinliğinde yapılan yürüyüşlerin tadına doyulmuyor. Gelin görün ki problemler insanın peşini bırakmıyor. Geçtiği yere can veren nehrin etrafına kurulmuş, yakaları birbirine köprülerle bağlayan şehrinizi dolaşmaya çıktınız. Nereye baksanız yeşillik ve nehir manzarası...tercihiniz sehirdeki bütün köprülerden geçecek bir yürüyüş turu ama şehirde tam 7 köprü olduğundan her köprüden yalnız ve ancak 1 kere geçmek istiyorsunuz, daha fazlası yorucu olabilir. Biliyorsunuz ki bu iş yola çıkmakla olmuyor. Elinize geçirdiğiniz şehir haritasından kendinizce bir yürüyüş planı hazırlamak daha mantıklı gibi görünüyor.

Birkaç yol denediniz ama doğru rotayı bir türlü keşfedemiyorsunuz. Acaba öyle bir rota mı yok, ya da var da siz mi bulamıyorsunuz? “İstenen koşulları sağlayan böyle bir gezi planı çizilemez” demek yetmiyor, ispatlamak lazım. Tam da keyifli bir gezi yapacakken bu problem de nereden çıktı? Keşke günlük hayatta karşılaşacağımız her problem böyle hoş(!) olsa...

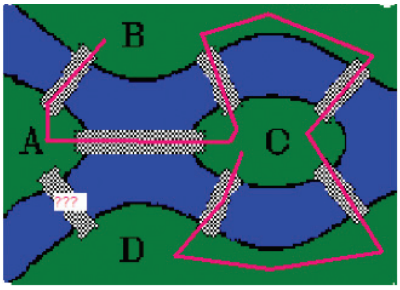


Königsberg’in Köprüleri

Anlattığımız bu şehir Pregel Irmağı üzerindeki iki adanın köprülerle kıyılara bağlandığı Prusya’nın Königsberg şehridir. Akşamüstü gezintisini ‘matematik problemine dönüştüren kişi de İsviçreli Matematikçi Leonard Euler. Daha önce de koca bir kuramın matematikçilerin kafasına takılan sorularla ortaya çıkabildiğine tanık olmuştuk. İşte bu problemin ortaya çıktığı 1736 yılı, aynı zamanda çizge kuramının başlangıç tarihi kabul edilir. Kuramın oluşmasında devreye giren mekanizmanın adıysa çoğu zaman olduğu gibi yine matematiksel modellemedir.

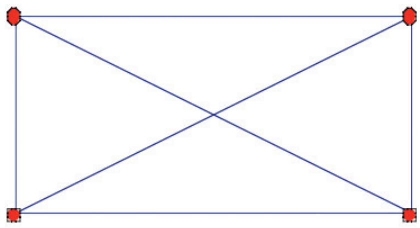
Matematiksel Modelleme

Model günlük hayatta işlerimizi kolaylaştırmak için sıkça kullandığımız bir kavram. Bir şehir planı, bina maketi ya da terziye diktireceğimiz elbisenin kağıt üstündeki resmi...Tüm bunlar problemi, onunla başedebileceğimiz boyuta ve konuma indirgememizi sağlayan yardımcı elemanlardır. Mimarların tasarladıkları bina ile aynı boyutta bir maket yapması ne kadar zor, kullanışsız ve gereksizse, Euler’in şehri günlerce dolaşıp uygun rotayı keşfetmeye çalışması aynı derece de anlamsız olur. Çünkü zaten böyle bir rota yok; ama bu durum bir kanıt gerektirmekte.



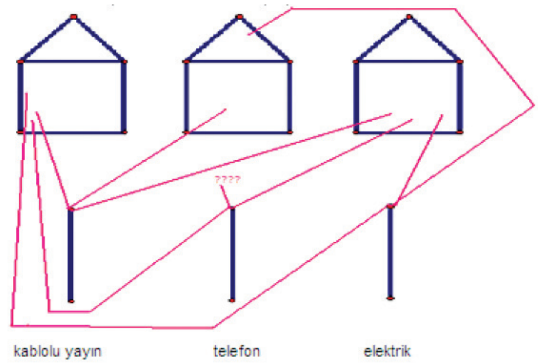
Elini Kaldırmadan Çiz!

Öğrenciler arasında dolaşan meşhur bir problem vardır. Kapalı bir zarf şeklini her çizginin üstünden yalnız bir kere geçerek elinizi kaldırmadan çizmek mümkün müdür? Cevabı ‘hayır’ olan bu problem herkesi uğraştırır. Sonunda herkes pes etse de kimse “hayır böyle bir çizim yapılamaz” deme cesaretini gösteremez. Çünkü bu cevap da kanıt gerektirir. Diğer ilginç bir konuysa bunun da bir matematik problemi olması.



Çizgiler Kesişmesin

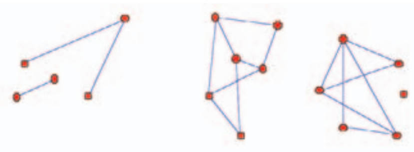
Karşılaşacağınız başka bir problem de şöyle olabilir. Yanyana üç ev, her evin önünde de bir direk var. Direkler, evlere sırasıyla kablolu yayın, telefon ve elektrik kabloları gönderiyor. İstenen, her eve 3 kablo gitmesi; ama bu kabloların hiçbirinin birbiriyle kesişmemesi. Böyle bir sistem yapılabilir mi acaba?



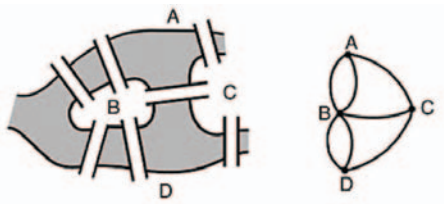
Matematikçiler problemleri bulunduğu yerde çözmektense, kafalarındaki soyut dünyaya çekip onlarla orada uğraşmayı tercih ederler. Matematik bu nedenle soyut hatta zor gözükür bizlere. Somut ile soyut arasındaki geçişe ve bu problemleri, çizge kuramının nasıl sahiplenip çözeceğine tanık olunca belki matematiği kendinize daha yakın bir bilim olarak göreceksiniz.

Çizge Kuramı

Çizge, köşeleri olan ve bu köşelerin birbirine kenarlarla bağlandığı şekillerdir. Her kenarın ucunda birer köşe noktası olmak zorunda olsa da köşe noktaları serbest olabilir.



Gerçek hayattaki birçok problemin çizgelerle modellenerek çözümlenmesi, oluşan çizgelerin özelliklerine ve fonksiyonlarına göre sınıflandırılıp yorumlanması, çizge kuramının kapsamına girer. Königsberg şehrinin bir çizgesini çizen Euler, önce kara parçaları ve köprüleri sırasıyla köşe ve kenarlarla eşleştirdi. 4 kara parçası için 4 köşe noktası ve 7 köprü için de 7 kenar çizgisi seçti. Bağlantıyı şehir planına göre yaptı: B'den çıkan 5 kenar (köprü) A,C, ve D'den çıkan 3 kenar ve tabii, kenarlardan biri C'yi B'ye bağlamalı ya da A ile B arasında 2 köprü olduğundan araya iki bağlantı kenarı çizilmeli gibi ayrıntıları da gözönünde bulundurdu:



Temel Teorem

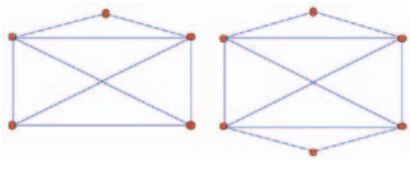
Bir teoremi değerli kılan öğelerden birisi, onun mümkün olduğu kadar çok örneğe uygulanabilmesidir. Özellik ayırt etmeksizin tüm çizgeleri içine alan (yani çizgeleri genelleyen) bir teorem yazsanız kuramın ilerlemesinde çok önemli bir adım atmış olursunuz. Şimdi bahsedeceğimiz teorem elinizi kaldırmadan çizebileceğiniz çizgelerin özelliğini bildiriyor. Yani tek bir mekanizmayla köprü ve zarf problemini ve hatta daha bir çok problemi çözebiliyoruz.

Kavramlar

Çizgeler, köşe noktalarından çıkan kenar sayısının tek veya çift sayı olmasına göre sınıflandırılır. Eğer bir çizgedeki tüm köşeler çift ise ona *çift dereceli çizge* denir. Herhangi iki köşesinden birden fazla kenar çıkanlara *çoklu çizge* denirken, ayrık olmayan çizgeler de *bağlı çizge* olarak adlandırılır. Örneğin, Königsberg için çizilen çizge çoklu, bağlı ve tek dereceli bir çizgedir. (A,D,C'den 3 B'den 5 kenar çıkıyor).

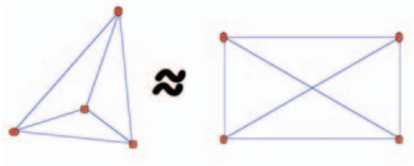
Teoreme göre eğer elinizde bağlı, çoklu ve çift bir çizge varsa, onu elinizi kaldırmadan çizebilirsiniz ve aynı şekilde çoklu, bağlı bir çizgeyi bu şekilde çizmek için onun tamamen çift dereceli veya en fazla 2 adet tek dereceli köşesi bulunan bir çizge olduğunu temin etmelisiniz.

Teoremler üretilmeden önce ortaya genellikle bir tez atılır. Bu tez, matematikçinin belli bir mantığa dayandırdığı biraz da önsezi eklediği ifadedir. Euler'in düşüncesine göre çizgeyi çizerken geldiğiniz bir köşeden farklı bir kenar yoluyla çıkmak için (ki aynı çizginin üstünden ikinci bir defa geçmeyesiniz) diğer bir kenar gereklidir. Yani giriş+çıkış, hep çift dereceli köşeler gerektirir. Eğer tek dereceli köşeler varsa, onlar izleyeceğiniz rotanın başına ve sonuna yerleştirilebilecek kadar yani en fazla iki tane olmalıdır. Çünkü 'giriş' ya da 'giriş+çıkış+tekrar giriş' tek derece gerektirir ve bu işlem ancak başta ve sonda yapılabilir. Bu nedenle sadece 2 adet tek dereceli köşeye izin verilebilir. Ayrık bir yapıyı el kaldırmadan çizmenin imkansız olduğu ne kadar açıksa, teoremin ancak bağlı çizgeler için çalışabilmesi de o kadar aşikardır. Bu teoremi referans göstererek zarf problemini hemen çözebiliriz. Her (4) köşesi tek olan çoklu bağlı zarf çizgesi asla el kaldırılmadan çizilemez. Ama teoremin koşullarına uyan şu çizgeler çizilebilir. Neden teoremin koşullarını sağladığı ve doğru rotayı keşfetmesi okuyucumuza kalsın. (İlkinde tek dereceli köşe ile başlayıp öbür tek dereceli köşe ile bitirmeniz gerektiğini unutmayın!)



Düzlemsel Çizgeler

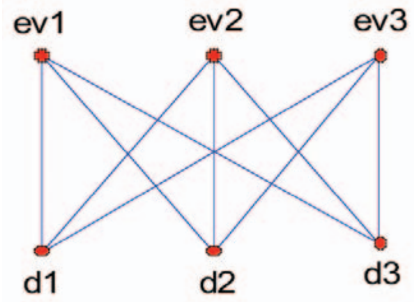
Bir çizgenin kenarlarının kesişmemesi özelliği, çizge kuramının diğer temel konularından biri. Tahmin edileceği üzere, bu da evler ve direkler probleminin kapsamına giriyor. Örneğin zarf çizgesi düzlemseldir. Her ne kadar biraz önce kullandığımız şekilde köşegenleri kesişse de onu farklı çizerek yani köşegenleri dışarıdan geçirerek bu problemin üstesinden gelebiliriz. Çizgilerinin kesişmediği en az bir çizime sahip olması onun düzlemsel olması için yeterlidir.



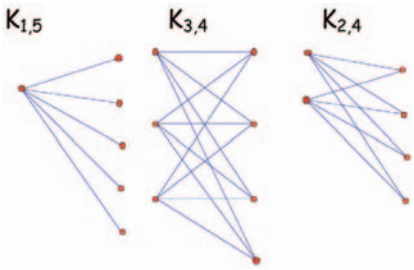
Bu iki çizge aynıdır. Çizge kuramının ve topolojinin Geometriden ayrılması bu noktada başlar. Geometride nicelik (sayısal özellikler) ön plana çıkarken topolojide nitelik önemlidir. Geometri kapsamında bu iki şeklin aynı olması mümkün mü? Açısı farklı, uzunluğu farklı her şeyden önce görünüşü farklı...Ama şekiller çizge kuramı sınırları içine girdiği anda eşittirler ya da eş yapıya sahiptirler; çünkü iki şekilde de her köşeden 3 kenar çıkarken kenar ve köşe sayılar birbirine eşittir.

Diğer çizge çeşitleri ve $K_{3,3}$

Eldeki somut problemi çizge kuramına aktarma konusunda biraz tecrübe edindiğimize göre 3 ev ve 3 direk problemini soyutlaştırmak daha kolay olacak. Ev ve direkler için toplam 6 nokta her 3 direkten çıkan 3'er kablo için toplam 9 kenara ihtiyacımız var:



Bu çizgenin dikkati çeken bir özelliği var; ama ne? Evler ve direkler kendi aralarında hiç bağlanmazken her evden her direğe bir bağ kurulmuş. Gösterimi $K_{n,m}$ ile yapılan bu tür çizgelerde köşeler iki ayrık kümeye ayrılıyor, birbiri ile kenar bağlantısı yapılmasına izin verilmiyor ve karşı kümedeki her köşe ile mutlaka bir bağ yapması gerekiyor.



Bir çizge $K_{3,3}$ içeriyorsa o çizge kesinlikle düzlemsel olamaz; çünkü $K_{3,3}$ düzlemsel bir çizge değildir. Bu ifadenin ispatı biraz daha teknik ayrıntı gerektiriyor. Hatta düzlemsel olmayan çizgelerin de özelliklerini genelleye temel bir teoremimiz de var. Şimdilik burada durup aklımızın soyut cephesine eklenen yeni bilgilerin özümsenmesini bekleyelim, önümüzdeki ay çizgelerin diğer özellikleri ve ilginç soruların çizge kuramına nasıl modellendiğiyle devam edelim. Belki bu arada şu sorunun cevabını düşünmek istersiniz: Bir partiye gelen herhangi 6 kişiden en az 3'ü (ikişer ikişer) birbirini ya tanıyor ya da tanımıyordur. Aksi mümkün mü? değilse neden? Cevabını yine çizge kuramı ile arayacağımız bu soruyu da önümüzdeki aya bırakıyoruz.

Nilüfer Karadağ
karadagnilufer@yahoo.com

Bir Buluşum Var

Asallara İlişkin Bir Formül

Merhaba;

Nisan sayısındaki asallık konusu dikkatimi çekti ve asal sayılarla ilgili bir araştırma yaptım. Yaptığım çalışmada bir şey fark ettim:

a ve b iki asal sayı olsun. Öyleyse aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$f_a^b = a \ (\mathrm{mod}\ foc_a^b)$$

işlemi kısaltmak için kullandığım kısaltmaların tanımları da şöyle.

$$f_a^b = a^b \text{ ve } foc_a^b = a \cdot b$$

Örneğin;

$$f_2^5 \equiv x \ (\mathrm{mod}\ foc_2^5)$$

$$2^5 \equiv x \ (\mathrm{mod}\ 2 \cdot 5)$$

$$32 \equiv x \ (\mathrm{mod}\ 10)$$

$$32 \equiv 2 \ (\mathrm{mod}\ 10)$$

Bu formülü farkettim, bulunup bulunmadığını merak ediyorum. Cevaplarsanız sevinirim.

Gökhan Deveci
Süleyman Nazif Lisesi, Avcılar/İstanbul

Gökhan arkadaşımıza bu çalışmasını bizlerle paylaştığı için teşekkür ediyor ve eğitim hayatında başarılar diliyoruz. Henüz lise yıllarında böyle bir formülü keşfedip, onu matematiğe has bir yazımla ifade edebilmesi, üniversite yıllarında matematik çalışma alternatifini göz önünde bulundurması gerektiğini tavsiye etmeğe itiyor bizleri.

Matematikçilerin temel işi teorem ispatlamaktır. Bazen yapılan işlemler sonucunda teorem kendiliğinden ortaya çıkar. Bazen de yapılan gözlemler ve önseziler (köprü problemindeki gibi) bir tez ortaya atıp ispat arayışına sürükler matematikçileri. Ama kimi zaman ortaya atılan iddialar çalışsa da ispatları kolay kolay bulunamaz. Kanıt olmadan da bu sonuçlar geçerli sayılamaz. Bunun en güzel örneği matematikçi Goldbach'ın asallarla ilgili ortaya attığı iddiadır. Haziran 1742'de Goldbach, Euler'e yazdığı bir mektupta

"2'den büyük her çift sayı, iki asal sayının toplamı şeklinde ifade edilebilir"

önermesinin, ya doğru olduğunu ispatlamasını ya da bunu sağlamayan bir örnek göstererek yanlış olduğunu ispatlamasını istemiştir. Bugüne kadar bu ifadenin zıttı bir örnek bulan olmadıysa da onu ispatlayan da henüz çıkmadı. Ama şu bir gerçek ki birgün bu kestirimi ispatlayan çıkarsa ünü en az Goldbach kadar fazla olacaktır. Sadece birkaç asırlık bir problemi çözdüğü için değil, aynı zamanda zekasının ona kazandıracağı 1 milyon dolarlık ödülü kapacağı için de...

Sizlerden gelen mektuplarda genellikle bir kaç örnekle çalıştığı gösterilen iddialar var ama ispatları ya da ispat girişimlerinden bahsedilmemiş. Ortaya attığınız bir iddiayı ispatlamanız ya da en azından bunu denemeniz sizi oldukça geliştirecek ve görüş açınızı genişletecektir.

Gökhan arkadaşımızın da örnekle desteklediği iddiası doğrudur. Yani buna bir teorem diyebiliriz. İspatını yapmadığı (ya da mektubunda göndermediği) için ispatı biz yaptık. *Yapılan ispat, teoremin daha önceden bulunmuş olduğunu kendiliğinden göz önüne serdiği için önemli!.* Arkadaşımız bu sonucu Fermat'ın küçük teoremini bilmeden kendi gözlemleri ile keşfettiyse bunun oldukça umut verici bir durum olduğunu eklemekte fayda var. Fermat'ın küçük teoremi lise müfredatı kapsamında öğretilen bir bilgi değil. Bu teorem şöyle:

p asal , $n \neq 0$ ve p'nin katı olmamak üzere

$$n^{p-1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$$

Şimdi okuyucumuzun tezini ispatlayalım:

Önce b asal a da 1'den büyük pozitif ve b'nin katı olmayan bir tamsayı olsun. Fermat'ın küçük teoremine uygulanabilen bu iki sayı ile şu sonucu elde ederiz:

$$a^{b-1} \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ b)$$

Doğruluğunu göstermek istediğimiz yani okuyucumuzun bize ilettiği ifade ise:

$$a^b \equiv a \ (\mathrm{mod}\ a \cdot b)$$

Bu iki ifadenin görüntüsünden arada bir geçiş olduğu hissediliyor. Temelinde modüler aritmetik bilgisi gerektiren bu geçişi modüler aritmetiğin tanımı ile sağlayabiliriz. Eğer

$$x = c_0 k + r,\ r \prec k;\ r, k \in N;\ x, c_0 \in Z$$

şeklinde yazılırsa $x \equiv r \ \mathrm{mod}(k)$ diyoruz.

Tanımı elimizdeki ifadelere uygularsak Fermat'ın küçük teoremi tanım gereği:

$$a^{b-1} = c_1 b + 1,\ c_1 \in Z$$

İspatlamak istediğimiz ifadeyse:

$$a^b = c_2 b + a, c_2 \in Z$$

şeklini alacaktır.

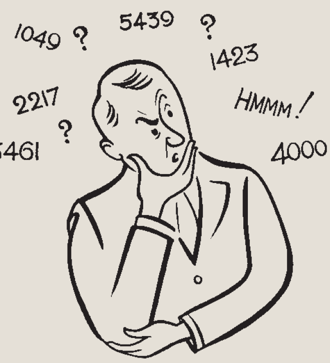
Tanımlar yazılınca aradaki geçiş rahatlıkla görülüyor. İlk ifadede her tarafı a sayısıyla çarparız:

$$a \cdot a^{b-1} = a \cdot c_1 b + a \cdot 1,\ c_1 \in Z$$

$$a^b = c_1 ab + a$$

Şimdi $a \prec ab$ şartı sağlandığı ve c_1 tam sayı olduğu için modüler aritmetiğe geri geçebiliriz.

$$a^b = a \ (\mathrm{mod}\ ab)$$



Bu ispat gösteriyor ki ifade b asal ve a ile b aralarında asal iken de çalışıyor yani a'yı asal seçip teoremi daraltmaya gerek yok.

Kısaca elimizdeki sonuç Fermat'ın küçük teoreminde mod dahil her tarafı a ile çarparak elde edilebiliniyor. Bu nedenle "bilinen bir ifadedir" demek yanlış olmaz. Bilinen bir denkliğin her tarafı aynı sayıyla çarpılarak bulunduğu düşünülürse Fermat'ın denkliğinin bizi ilerlettiğinden daha fazla ilerletmeyecektir. Ama kendisi ifadeyi bu yolla değil de gözlemler yolu ile elde ettiyse bu daha önce de belirttiğimiz gibi umut verici olabilir.

Nilüfer Karadağ

Eğer siz de kaydettiğiniz önemli bir bulgu olduğunu düşünüyorsanız dergimize gönderin ve onu sizin için değerlendirelim. Adresimiz:

TÜBİTAK Bilim ve Teknik Dergisi,
Buluşumu Değerlendirin Köşesi,
Atatürk Bulvarı No:221
Kavaklıdere-ANKARA