Klasik Pedagoji ve Anlayış Krizi

"İçimizde en iyilerin bile zaman zaman esiri olduğu bu katı, kapalı ve anlaşılması zor dil (esoterisizm); güncel yazılarımızda yanlış öğretim kavramları nedeniyle gerçek sentezlerin yerini alan bu kasvetli ders kitapları ve çalışmalarımız dışına çıkınca, dürüstlükle sarıldığımız metodları, meslekten olmayan insanlara anlatmamızı engelleyen bu yersiz alçakgönüllülük..."

Marc Bloch, Tarihçinin Sanatı

ÜNİVERSİTELERDEKİ matematik derslerinde teorem kanıtlamaya mutlaka belli bir zaman ayrılır. Konu ne kadar soyut ve derinse, ayrılan zaman o kadar fazladır. Teorem kanıtlamadaki amaçlardan biri, mantık, psikoloji ve seziş yoluyla, öğrencileri bazı ifadelerin doğruluğuna inandırmaktır. Bütün deneyimli öğretmenlerin, üniversitelerin ilk sınıflarında sıklıkla karşılaştığı bir olay vardır: kafası karışmış doğrucu bir öğrenci, şöyle bağırarak teoremin kanıtlanmasını keser: "Neyi niçin yaptığınızı ve şu şöyledir dediğiniz şeyin niçin öyle olduğunu anlamadım. Ayrıca vardığınız sonuçlara nasıl eriştiğinizi kavrayamıyorum."

Öğretmen, anlama kriziyle karşı karşıyadır ve ne yazık ki bu durumda pek bir şey yapamaz. Öğretmen, ya anlaşılmamış noktayı biraz farklı terimlerle yeniden anlatır veya odasında bu konuyu tekrar incelediğinde mutlaka anlayacağını söyleyerek öğrencinin açıklama isteğini reddeder.

Matematiğin özü üzerine düzenlenmiş bir kursta (bu kitap kısmen onun ürünüdür), dersin tam ortasında böyle bir kriz yüzeye çıktı. Bu bende standart, açık bir tepkiye neden oldu; fakat kendimi tuttum. Krizle uğraşmayı bir kenara atacak yerde, matematiğin güçlüğünü ve bu güçlüklere karşı aşağıda sunacağım tepkileri derinlemesine araştırarak ders veriş şeklimi değiştirdim.

İki Gözleme Problemi

Tartışılan ve kanıtlanması krize yol açan problem, sıklıkla "iki gözleme problemi" diye tanınan problemdi. Bu teorem, aynı düzlem üzerinde biçimi keyfi olarak seçilen iki gözlemenin herbirinin alanının, bıçağın doğru biçimi tek bir kesişiyle aynı anda iki eşit yarıma bölüneceğini ifade eder (Şekil 1). Bu ilginç teorem, temel gerçek değişken teorisinin veya temel topolojinin bir parçasıdır ve sıklıkla sürekli fonksiyonların uygulamasına örnek olarak gösterilir. Teoremi çekici kılan noktalardan biri, onun çok genel oluşudur. Gözlemelerin daire, kare veya elips gibi herhangi belirli bir biçimde olması gerekmemektedir. Gözlemelerin içinde delikler veya hava kabarcıkları bile olabilir (Şekil 2). Yalnız bu kadar genel oluşun bir bedeli de vardır: teorem bize bitirilmiş bir çizim şeklinde sunulmaktadır; şöyle ki teorem, gözlemeleri iki eşit yarıma bölen doğrusal bir kesişten sözetmekte; fakat bu doğrusal kesiyi nasıl yapacağımızı anlatmamaktadır. Oysa gözlemelerin kesin biçimi ve yeri hakkında elde sayısal veriler olmadan böyle bir doğruyu çizmek olanaksızdır.

Şekil 1: Rastgele şekilli iki gözlemenin herbirini eşit iki yarıya bölen bir doğru bulunabilir.

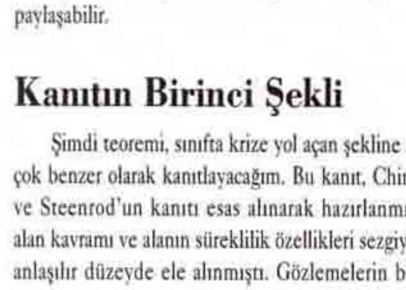
Şekil 2: Gözlemeler delikli de olsa her birini eşit iki yarıya bölen bir doğru bulunabilir.

Bu teoremin, böylesi kaygıları yoktur. Teorem insanın görme ve hareket duygularını büyük ölçüde aktive etmektedir. Öyle ki; onu öğrenen biri, hemen bir yap boz süreci içine girerek, hayalinde kesi üzerine kesi yapmaya başlayabilir.

Bu teoremin herhangi ciddi bir uygulaması olduğunu duymadım; fakat böyle bir olasılık olmadığını da söyleyemem. Bazı özel durumlar ve genellemeler söz konusudur. Örneğin gözlemeler, aynı düzlem üzerinde herhangi bir pozisyonda olabilirler. İçiçe geçmiş olabilirler. Biri bütünüyle diğerinin içinde kalmışsa, bir gölün ortasındaki adayı andıran bir durum doğar. Her iki gözlemenin alanını aynı zamanda iki eşit yarıya bölen bir doğru vardır. Problem üç boyutlu hale genellendiğinde, ünlü salamlı sandviç teoremi ortaya çıkar; bir dilim esmer ekmekle bir dilim beyaz ekmek arasına bir dilim salam konarak bir sandviç yapılmış olsun. Bir bıçakla yapılacak düzlem biçimi uygun bir kesiş, aynı anda her üç dilimi de iki eşit yarıya bölebilir ve böylece iki kişi, bu sandviçi tam bir eşitlikle paylaşabilir.

Kanıtın Birinci Şekli

Şimdi teoremi, sınıfta krize yol açan şekline az çok benzer olarak kanıtlayacağım. Bu kanıt, Chinn ve Steenrod'un kanıtı esas alınarak hazırlanmış; alan kavramı ve alanın süreklilik özellikleri sezgiyle anlaşılır düzeyde ele alınmıştı. Gözlemelerin büyüklüğünün sınırlı olduğunu kabul ediyoruz. Tek bir gözlemeyi ele alalım (Şekil 3). Eğer gözlemeden geçmeyen bir kesişle işe başlarsak (C_1), gözleme alanının tamamı kesinin bir tarafında kalır. Bıçağı

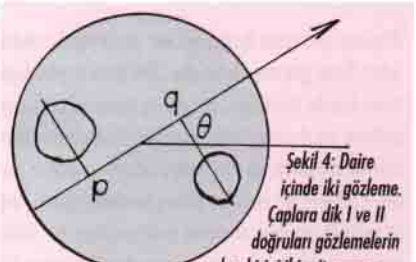


Şekil 3: Bir gözleme ve bir doğru olsun. Doğru C_1'de iken gözlemenin tamamı, doğrunun sağında kalır. Doğruyu C_0'a kadar kaydıralım. Şimdi doğrunun sağında kalan gözleme alanı sıfırdır. O halde bu doğru gözlemeyi iki eşit yarıma bölen bir $C_{1/2}$ durumundan geçmiştir.

kendisine paralel olarak kaydırırsak, gözlemenin giderek daha az alanı kesinin bir tarafında kalacaktır. Devam edersek eninde sonunda bıçak yine gözlemeden geçmeyen bir kesi (C_0) yapacak ve kesinin bir tarafında kalan gözleme alanı sıfır olacaktır. Kesi C_1'den C_0'a doğru hareket ettikçe, kesinin bir tarafında kalan gözleme alanı devamlı değişir; kesinin bir tarafında kalan gözleme alanı C_1'de %100 iken C_0'da %0'a iner. O halde hiç kuşku yok ki gözleme alanının iki eşit yarıya ayrıldığı tek bir $C_{1/2}$ pozisyonu mevcut olmalıdır. O halde:

Önsav: Bir düzlemde $0^0 \le \theta \le 180^0$ olacak şekilde keyfi (dilemsel) bir doğrultu verildiğinde, bu doğrultuda (veya buna dik doğrultuda) bıçakla yapılacak bir kesiş, verilen bir gözlemeyi iki eşit yarıya böler.

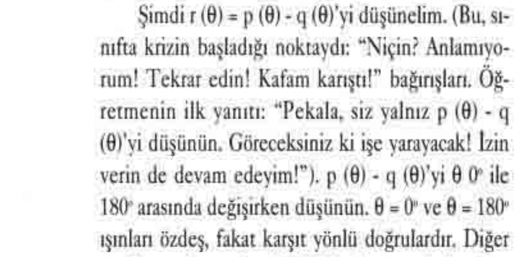
Şimdi teoremin tamamını kanıtlamaya hazırız. İki gözleme içeren herhangi bir daire çizin (Şekil 4). Bu daireyi referans sistemi (karşılaştırma koor-



Şekil 4: Daire içinde iki gözleme. Çaplara dik I ve II doğruları gözlemelerin her birini iki eşit yarıma bölüyor. İki θ ışını ile dikmelerin kesişme noktalarının merkezden uzaklığı p (θ) ve q (θ) olsun.

dinat sistemi) olarak kullanın. Dairenin merkezini işaretleyin ve θ açısı 0° ile 180° arasında değişecek şekilde merkezden geçen θ açılı çaplar çizin. Her θ için θ ışınına dik ve gözleme I'i iki eşit yarıya bölen tek bir kesi vardır. Bu kesi θ ışınını, daire merkezinden $p(\theta)$ uzaklıkta kesmiş olsun. Gözleme II için benzer şekilde $q(\theta)$'yi tanımlayalım.

Şimdi $r(\theta) = p(\theta) - q(\theta)$'yi düşünelim. (Bu, sınıfta krizin başladığı noktaydı: "Niçin? Anlamıyorum! Tekrar edin! Kafam karıştı!" bağırışları. Öğretmenin ilk yanıtı: "Pekala, siz yalnız $p(\theta) - q(\theta)$'yi düşünün. Göreceksiniz ki işe yarayacak! İzin verin de devam edeyim!"). $p(\theta) - q(\theta)$'yi θ 0° ile 180° arasında değişirken düşünün. $\theta = 0°$ ve $\theta = 180°$ ışınları özdeş, fakat karşıt yönlü doğrulardır. Diğer taraftan gözleme I ve II'yi iki eşit yarıya bölen I ve II dikmelerinin durumları, 0°'de ve 180°'de özdeşse de $p(180°)$'nin ve $p(0°)$'nin uzunlukları karşıt işaretlidir: $p(180°) = -p(0°)$ (Şekil 5). Benzer olarak $q(180°) = -q(0°)$. Bu nedenle $r(0°) = p(0°) - q(0°)$ ve $r(180°) = p(180°) - q(180°)$ ve $r(180°) = -r(0°)$. Şimdi a) $r(0°) = 0$ ise $p(0°) = q(0°)$'dir; bunun anlamı I ve II dikmelerinin çakışmasıdır; bu ise tek bir kesi ile her iki gözlemenin iki eşit yarıya bölünebilmesi demektir. Eğer b) $r(0°) \neq 0$ ise, θ'nin değeri 0° ile 180° arasında değiştikçe $r(\theta)$, işaret değiştirir. Bu değişme süreklidir; o halde $r(\theta) = 0$'ı gerçekleştiren bir θ pozisyonu mevcut olmalıdır. Bu noktada $p(\theta) = q(\theta)$'dir; bu ise problemin iki kesinin gerçekten çakışması şeklinde çözülmesi demektir.



Şekil 5: θ = 0° ve θ = 180° için p(0°)= - p(180°) ve q(0°)= - q(180°)

Öğretmenin Reaksiyonu

Kriz karşısında ilk reaksiyonum, şunu düşünmek oldu: kriz, ders anlatışımın hangi noktasında niçin belirmişti? Kriz, aslında dersin en zor noktası sayılamayacak "basit" bir tanım sırasında ortaya çıkmıştı. Kimbilir, belki de bu bardağı taşıran son damla olmuştu. Bir sürü karmaşık bilgiyi üstüste yığıyorduk. Önsav sınıftan kolay denebilecek bir şekilde geçmişti. Gözlemeleri bir referans dairesi içine almak esrarengizdi. Bir ışın boyunca yönlendirilmiş uzaklıkların ölçülmesi sıkıntılıydı. $p(\theta)$ ve $q(\theta)$ gibi semboller, deneyimsizliğin fonksiyonel semboller karşısında duyduğu bütün güvensizliğin açığa çıkmasına neden olmuştu. Yukarıda belirttiğim kanıtı tekrar inceleyince, en iyi olasılıkla, sınıfımın kanıtını anlamadan, bir teoremi kabul etmeye zorlandığı hissiyle başbaşa kaldım. Ayrıca şurası da açıkça belliydi ki anlama zorluğu bir kere başladıktan sonra, kanıtı en ince ayrıntılarına kadar tekrar anlatmanın bir yararı yoktu. Başka bir yaklaşım gerekiyordu.

Buluşun Nasıl Yapıldığının Belgelenmesi

Bazen bir buluşu anlamanın yolu, o buluşun nasıl yapıldığının öğrenilmesinden geçer denir. Şöyle ki eğer bir buluşun başlangıçta hangi yollardan giderek yapıldığı bilinirse, bu buluşun sınıfta anlatılması kolaylaşabilir. Tabii eğer buluşun başlangıcı karanlık, zor veya tamamen farklı bir olaylar örgüsü içine gömülmüşse; bu söylenen uygulanamaz. Buna karşı hızlı ve güncel bir sunuş, genellemelerle örtülü olabilir ve buluşun eski halini anlatmak, onun çok daha iyi kavranmasını sağlayabilir.

Bazen öğrencinin anlamasını sağlamanın en emin yolu, öğretmenin kendisinin, hafifçe farklı (ve hatta yeni) yollardan giderek bir kanıt oluşturmasıdır. Bu şekilde güçlükler dürüst bir şekilde yenilebilir ve parlak çıkış yolları bulunabilir. Kriz patlak verdikten sonra büroma gittim ve kafa karıştırıcı adım olan "$r(\theta) = p(\theta) - q(\theta)$ olsun"dan kaçınan, hafifçe farklı bir kanıt oluşturdum (ve belgeledim). İşaret değiştirme konusunun yeniden gündeme geleceğini biliyordum; fakat onu hafifçe farklı bir kılıkta sunmayı planladım.

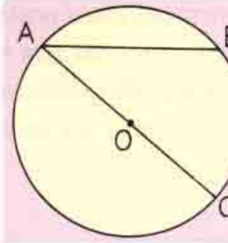
Kanıtın İkinci Şekli

a) Öncü Sezişi Oluşturmak:

1- Bir dairenin her çapı, onun alanını iki eşit yarıya böler.

2- Bir başka deyişle, bir dairenin alanını iki eşit yarıya bölen her doğru çap olmak zorundadır.

İlk ifade açıkça anlaşılıyorsa da ikincisini anlamak, biraz daha zordur. Eğer AB çap değilse, AOC çapını çizersiniz (Şekil 6). ABC kamasının varlığı, AB üzerinde kalan alanın bir yarım daireden daha küçük olduğunu açıkça ortaya koyar.



Şekil 6: Bir çap bir daireyi iki eşit parçayc ayırır.

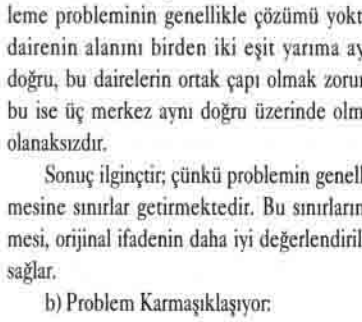
3- İki daire probleminin (iki dairenin alanını aynı anda iki eşit yarıma bölmek), dairelerin merkezleri ayrı ise tek ve yalnız tek bir çözümü vardır: iki dairenin alanını birden iki eşit yarıma bölen doğru, bu iki dairenin ortak çapı olmak zorundadır. Eğer iki dairenin merkezi çakışmışsa sonsuz çözüm vardır.

4- Sonuç: Üç daire problemi ve dolayısıyla üç gözleme probleminin genellikle çözümü yoktur. Üç dairenin alanını birden iki eşit yarıma ayıracak doğru, bu dairelerin ortak çapı olmak zorundadır; bu ise üç merkez aynı doğru üzerinde olmadıkça olanaksızdır.

Sonuç ilginçtir; çünkü problemin genelleştirilmesine sınırlar getirmektedir. Bu sınırların bilinmesi, orijinal ifadenin daha iyi değerlendirilmesini sağlar.

b) Problem Karmaşıklaşıyor:

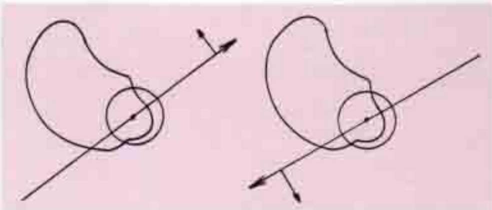
Dairelerden biri kalsın, diğer dairenin yerini ise II ile göstereceğimiz garip biçimli bir gözleme alsın (Şekil 7). Gözlemenin dairenin tamamen dı-



Şekil 7: Çap, gözleme II'nin bir yanından ötekine geçerken gözleme II'nin çapların oklu tarafında kalan alanının yüzdesi, %100 den %0'a düşer.

şında olduğunu varsayın. Daireyi iki eşit yarıma bölmek için bir çapa ihtiyacımız var. O halde bir çap çizin. Bu çapın ve bu çapa dik bir çapın uçlarına birer ok koyun; böylece çapın bir tarafını diğerinden ayırtedecek bir koordinat sistemi yaratmış oldunuz. Gözleme II'nin çapların oklu tarafında kalan alanının yüzdesini $p(\theta)$ ile gösterelim. Açıkça bellidir ki çap, gözleme II'nin bir yanından ötekine geçerken, p (θ) %100'den %0'a düşer. Süreklilik olduğundan çap, %50 noktasından geçmiş olmalıdır.

Fakat daire ve gözleme içiçe geçmişse ve bu nedenle %100'den %0'a gidemiyorsak ne olacak? (Şekil 8). Bu durumda çapın hareketini kısıtlamayın ve onun $0° \leq \theta \leq 180°$ olacak şekilde dönmesini sağlayın. Şekilde görüldüğü gibi çaplar özdeş, fakat



Şekil 8: θ =0° ve θ =180° çapları özdeş, fakat karşıt yönlerde. O halde p(0°)+ p(180°) =%100. Örneğin p(0°)= %43 ve p(180°)=%57 ise θ 'nın p(θ)=%50 yapan bir değeri olmak zorundadır.

yönleri birbirinin karşıtı (oh!); o halde p (0°) + p (180°) = %100. Böylece örneğin p (0°) = %43 ve p (180°) =%57 ise, θ'nin p (θ) = %50 yapan bir ara değeri var demektir.

c) Köktenci Tartışma:

Daireyi bir yana koyup iki genel gözlemeyi düşünün. Yön verilmiş θ doğrultusuna paralel bir doğruyla gözleme I'i iki eşit yarıma ayırın (önsav gereğince). Gözleme II'nin bölücü doğrunun oklu tarafında kalan alanının yüzdesine p (θ) deyin. Az önceki gibi p (0°) + p (180°) = %100 sonucuna vardık. Demek ki sonuç genel durumda da aynıdır.

Bu ikinci kanıtlama ile kendimi ilkinde olduğundan daha iyi hissettim. Bu belki daha önce karşılaştığım krizle ilgiliydi. Belki de zihnimdeki bu yeni kanıtla kendimi daha güvende hissediyordum - o benim kendi düşündüğüm bir şeydi. Şöyle ya da böyle, teoremin daha iyi anlaşılmasını sağlamıştım. Sınıf, krizin diğer yönlerini tartışmaya devam etti.

Ders Kitaplarındaki Sunuluş Şekli

Matematiğin ders kitaplarında ve monograflarda sunulan şeklini izlemek neden bu kadar zor? Halk, Liszt'in zor bir piyano parçasının notalarını bir çırpıda okuması gibi, usta matematikçilerin bir matematik sayfasını bir bakışta okuduğunu sanabilir. Bu, ender olarak böyledir. Profesyonel bir matematikçinin, bir matematik sayfasını sindirerek okuması yavaş, zor ve zahmetli bir olaydır.

Ders kitaplarındaki sunuş sıklıkla "geri kalmış" durumdadır. Buluşların nasıl yapıldığı anlatılmaz ve belgelenmez. Teorem ve kanıtı hangi yoldan ve hangi araçlarla anlatılmış olursa olsun, bütün sözsel ve sembolik sunuş, mantıki-tümden-gelimci yöntemin kurallarına göre yeniden düzenlenmiş ve cilalanmıştır. Meslek estetiği bunu gerektirir. Daha önceki tarihi olaylar, eski Yunan gelenekleri bunu gerektirir. Yine aynı derecede gerçektir ki kitap basım endüstrisinin ekonomi kuralları da, minimum bir hacimde maksimum bilgi verilmesini gerektirmektedir. Matematik, bunu öç alırcasına gerçekleştirir. Kısalık, matematiksel zeka ve parlaklığın ruhudur. Herşeyi inceden inceye açıklamak, sıkıcı addedilir.

Otoriter veya Dogmatik Sunuş

Matematiğin sınıfta olsun, kitaplarda olsun genellikle otoriter bir şekilde sunulduğu kabul edilir ve bu husus öğrencilerde öfkeye yol açabilir. İdeal olarak matematik öğretiminin şöyle olması gerekir: "Gel, birlikte mantığımızı çalıştıralım." Fakat öğretmenin ağzından çıkan sıklıkla şu sözlerdir: "Bakın, size bu işin şöyle olduğunu söylüyorum." Bu, kanıtı zorla kabul ettirmek demektir. Bunun böyle olmasının birçok nedenleri vardır. Herşeyden önce zaman yetersizliği söz konusudur. Bir dönem boyunca, öğrenciyi bir sonraki matematik veya fizik kursuna hazırlayabilmek için, belli bir programı bitirmeye çalışırız (veya bitirmemiz gerektiğini düşünürüz). Bu nedenle güçlükler üzerinde seve seve durmaya zamanımız yoktur; soluk almadan programımızı tamamlamamız gerekir.

Sonra bazı öğretmenlerin çok akıllı görünmek istemesi söz konusudur (size anlattığım hiç de zor değil; ben onu rahatlıkla anlayabiliyorum; eğer siz anlayamıyorsanız hayli akılsız olmalısınız).

Madalyonun öteki yüzünde öğretmenin bilgisiz ve hazırlıksız olması bulunabilir; bu durumda öğretmen kitapta anlatılana kelimesi kelimesine sadık kalır. Bazı öğretmenler konularını sınırlayamazlar. Bazılarının matematikçi olarak kendilerine güvenleri yoktur ve bizzat kendileri, kullandıkları kitap veya monografın otoritesinden dehşete düşerler. "Ayrıntılarla ilgilenmeyi" bilmezler veya ilgilenirlerse ayrıntılarla ilgilenmeyi öğretmekten korkarlar.

Öğrencilerin Direnmesi

Öğrencilerin direnmesinin, kızmasının, kabul etmeyişinin nedenleri neler olabilir?

Herşeyden önce öğrenmekte oldukları konu hakkında çok sabırsızdırlar. İşin şaşılacak yanı, bu sabırsızlığa daha iyi öğrencilerde daha sık rastlanmasıdır. Sınıftaki en iyi öğrenciler, konuyu derhal anlamak isterler. Matematik onlara her zaman kolay gelmiştir. Anlayış ve sezişe ucuzca kavuşmuşlardır. Matematiğin daha üst basamaklarına ulaştıkça konu zorlaşır. Deneyimleri yoktur. Stratejileri yoktur. Ayrıntılara girmeyi bilmezler. Anlamak onlar için giderek daha ağrılı olmaya başlar. Sunulacak konunun, yüzyıllar boyunca onlar ve yüzlerce parlak beynin düşünme ürünü olduğunu söylemeniz, onları pek etkilemez. Konuyu derhal anlama isteği son derece güçlüdür ve sonunda öğrenciyi harap edebilir (Eğer hemen anlayamazsam, hiçbir zaman anlayamam ve o zaman canı cehenneme derim).

Konudaki temel düşünce, çoğunlukla çok açık; fakat zordur. Öğrenciler dünyada kendilerinkinden daha parlak ve anlayışlı beyinler olduğunu kabul etmeye yanaşmamak gibi bir ruh hali içinde olabilirler. Bir gün aniden yüksek matematiğin bazı konularının kendi anlayış sınırlarının ötesinde olduğu bilincine varabilirler; bu, onların özbenliklerinde bir şok ve darbe etkisi yapar. Bu karşı koyuş artabilir ve çalışmamak, ilgisizlik ve buluş yapmayı denemeye isteksizlik şeklinde ortaya çıkabilir.

Sık olarak "matematiğe yatkın" ve "matematiğe yatkın olmayan" tiplerden sözedilir. Neden bazı insanların matematiği kolayca öğrendiği ve neden diğerlerine matematiğin son derece zor geldiği konusu, bugüne kadar çözülememiştir. Matematiğe yatkın olmayan tiplerin karşılaştıkları güçlükler, doğuştan gelen bir yetersizliğin doğal sonucu olabilir. Herkes bir piyanist veya buz patencisi olamıyor. Neden herkes matematikçi olabilsin ki?

İşin Özü

Beynimizde çakan bir şimşek, bir atılım, "oh, nihayet buldum" sözleri, tamamen yeni birşey bulunduğunu, birşey için yeni bir anlayış getirildiğini ve toplum önüne yeni bir kavram konduğunu sembolize eder. Yaratıcılık diye birşey vardır; hergün birşeyler yaratılmaktadır. Yaratıcılık yeteneğinin toplumda demokratik bir şekilde dağıldığını söyleyemeyiz, fakat hiç de az sayılmaz. Yaratıcılığın nereden kaynaklandığı anlaşılmamıştır; ancak belli sınırlar içinde artırılabilir veya azaltılabilir. Belli sınırlar içinde öğretilebilir. Ne var ki herkesin yapabileceklerinin bir sınırı vardır; herkes daha parlak bir başarı karşısında hayal kırıklığına uğrar ve şaşırır. Bunun kanıtı için uzağa gitmeye gerek yok: etrafınıza şöyle bir bakın; hayatın ve matematiğin çözülmemiş problemlerle dolu olduğunu göreceksiniz. Bu hatırımıza yeni sorular getiriyor: Nedir yaratıcılık? Zihinsel bir mutasyon mu? Doğanın bir lütfu mu? Tanrıların bir armağanı mı?

Bugün buluşların özünü ortaya koymaya yönelik çok çalışma ve deney yapılıyor. Hatta bilgisayarlarla onu otomatikleştirmek ve artırmak, zamanımızı tarihin büyük çağlarından biri haline getirmek çabaları var. Yine de şurası açıkça bellidir ki insan, örneklere bakarak ve ilkeleri benimseyerek öğrenir. İnsan büyük adamların ayağı dibinde oturarak ve onları taklit ederek öğrenir. Yine şurası da kesindir ki büyük adamlar çevrelerindekilere kendi strateji ve yaratıcılıklarından birşeyler verebilirler. Tarih bunun somut örnekleriyle doludur.

Davis P.J., Reuben H, The Mathematical Experience, New York 1983

Çeviri: Selçuk Alsan