Düşünmek ya da Düşünmemekte direnmek

HİÇ TANIMADIĞIMIZ SAYILAR

Dr. Herman AMATO
Çizen: Ferruh DOĞAN

Sayılara başka bir açıdan bakınca, sonuçları bizi şaşkınlığa uğratmış olan birçok problemin, çok eskiden bildiğimiz, aşina olduğumuz sasayılar sıra fikrini ya da büyüklük fikrini vermek yıların bazı özellikleri yardımiyle kolaylıkla çözülebildiğini görürüz.

Bu kez tekrar şaşkınlığa uğrar. «Bu iş bu kadar basit mi idi? Sayılar hakkında bilgilerimiz bu kadar az mı idi?» diye düşünürüz.

Örneğin 7 kişi kaç farklı sıra yapabilir?

6 mı? 21 mi? Yoksa 5040 mı? (5 dakika düşünün).

Doğru cevap 5040 tır. «Ne kadar çok!» diye şaştınız mı? O halde bildiğimiz sayılarla en çok 7 basamak kullanarak 10 milyon farklı sayı yazabildiğimize büsbütün şaşıp feryadı basmanız gerekir. 0 (sıfır) dan başlıyarak 9 999 999 a kadar olan sayıları yazın ve sayın tam 10 milyon bulacaksınız (1 den 9 999 999 a kadar 9 999 999 sayı, bir de sıfırı eklersek tam 10 milyon eder).

Sayılara başka bir gözle bakış. Bildiğiniz gibi amacıyla kullanılır. Bunların dışında üzerinde hiç durulmadan geçilen çok geniş bir kullanım alanı daha vardır: bu da isimlendirmede ya da daha doğrusu cisimleri birbirlerinden ayırt etmek için sayıların kullanılmasıdır. Her karar bir seçimdir. Ve seçebilmek için birinci şart ayırt edebilmektir. Bütün seçimler ayırt edilebilen şeyler arasında yapılabilir. Bu cisimlerin her birinin yerine bir sayı koyarak, cisimlere uygulayabilecegimiz matematik işlemleri sayılar üzerinde daha kolaylıkla uygulayabiliriz. Örneğin iki telefonu, iki piyango biletini, iki benzer arabayı, iki ikiz askeri, öğrenciyi üzerindeki numaralar yardımıyle ayırt edebiliriz. Öğrencilere veya arabalara tatbik edebileceğimiz problemleri, onları temsil eden sayılara da uygulayabiliriz.

Ayırt edilmesi gereken iki tip sayı. 134687, 132255. Bu iki sayıya dikkatle bakın! Büyüklük ve rakkam değişikliği gibi farkların üzerinde durmayın. Aralarında ne gibi temelli bir fark olduğunu bulmaya çalışın. (5 dakika düşünün).

Birinci sayıda aynı rakkam değişik basamaklarda tekrarlanmamıştır. Oysa ikinci sayıda 2 ve 5 rakkamları ikişer defa tekrarlanmıştır.

0 dan 9 a kadar numaralanmış 10 bilye bulunan bir torbadan 5 bilye çeksek ve sonuçları virgül gibi işaretler koymadan sırasıyle kaydersek, 5 basamaklı bir sayı elde ederiz. Örneğin sırasıyle 1,3,6,9 ve 5 gelirse, 13695 sayısını elde ederiz. Burada her çekimden sonra bilyeler tekrar torbaya konulmamıştır. Eğer her çekimden sonra bilyeleri yerine koyarsak, tekrar aynı bilyeyi çekebileceğimizden, 5 çekimde basamaklarında aynı rakamların tekrarlandığı 5 basamaklı sayılar elde edebileceğiz (örneğin 01034). Birinci halde her çekimden sonra ihtimal değişir: Önce 10 bilye arasından çekiyoruz, birini bulma ihtimali 1/10 dur. Birini çektikten sonra geriye kalân 9 bilyeden birini bulma ihtimali 1/9 olur. 2. nci çekimden sonra geriye kalan 8 bilyeden birini bulma ihtimali 1/8 dir. Bilyeler bitene kadar bu iş böyle devam eder. Oysa bilyeleri her seferinde iade edip çekim yaparsak ihtimal degişmez, birini bulma ihtimali daima 1/10 dur.

6 basamak ve telefonlar. Bilindiği gibi İstanbulda telefon numaraları 6 basamaklı sayılardan yapılmıştır. Başa sıfır da gelebilir: 004455 gibi bir telefon numarası yadırganmaz. Şimdi 6 basamak yardımı ile kaç değişik telefona numara verebileceğimizi ve şebekenin kaç telefon alabileceğini hesaplayalım. Birinci basamağa 10 değişik rakam gelebilir (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9). Örnek olarak birinci basamağın 0 ile başladığını farzedelim. Bunun yanına ikinci bir basamak eklemekle bundan kaç tane iki basamaklı sayı türetebiliriz? Gene 10 (00, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09). O halde bütün tek basamaklı 10 rakkamdan ikinci basamak yardımiyle onardan yüz (10^2) iki basamaklı sayı elde ederiz. Herhangi bir sayıdan bir basamak eklemekle aynı şekilde on sayı türetebildiğimiz için, yüz 2 basamaklı sayıdan bin (10^3) 3 basamaklı sayı; bin, üç basamaklı sayıdan on bin (10^4) 4 basamaklı sayı; On bin, dört basamaklı sayıdan yüz bin (10^5) 5 basamaklı sayı ve nihayet yüzbin, 5 basamaklı sayıdan 1 milyon (10^6) 6 basamaklı sayı elde ederiz.

Yani 6 basamak yardımiyle ancak bir milyon telefona numara verebiliriz. Rastgele 6 defa sinyal vererek aradığım numarayı bulma ihtimalim milyonda birdir. Piyango biletlerinin 6 hanesinde 0 dan 9 a kadar bütün rakamların kullanılmasına müsaade edildiği hallerde, piyango bileti için de durum aynıdır. Yani büyük ikramiyeyi kazanma şansı milyonda birdir. Şimdi bu bir milyon numara içerisinde kaç tanesinin, değişik basamaklarında, aynı rakamların tekrarlanmadığı sayılar grubuna girdiğine bakalım (örnek 64 71 90).

Değişik basamaklarında aynı rakamın tekrarlanmadığı telefon numaraları. Eger aradığım telefon numraasında aynı rakamın tekrarlanmadığını bilsem, rastgele değişik yerlere basarak 6 sinyal vermek suretiyle istediğim numarayı bulma ihtimalim ne kadardır?

Bu soruya cevap verebilmek için bir milyon numara içinde kaçının değişik basamaklarında aynı rakamın tekrarlanmadığını bulmalıyız.

Şöyle bir çözüm yolu düşünebiliriz :

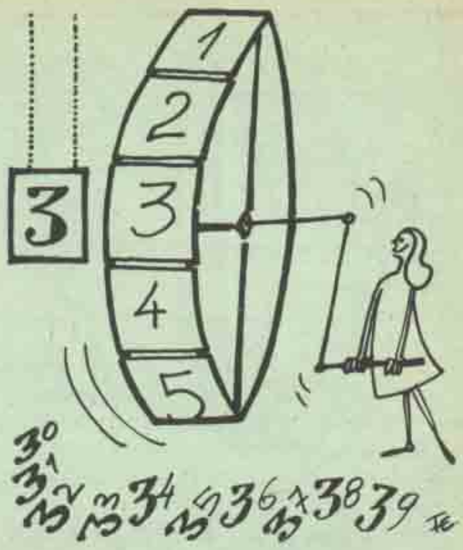
a) Mademki 6 basamakta değişik rakamlar kullanacağız, yazacağımız her sayı için 6 değişik rakamdan istifade etmeliyiz. Bu 6 rakam 0 dan 9'a kadar olan 10 rakam içerisinden çeşitli şekillerde seçebiliriz.

Örneğin 1, 7, 5, 4, 3, 2 veya 0, 9, 8, 7, 5, 2 gibi değişik seçimler yapılabilir. (İki seçimin değişik olması için aralarında bir tek fark yeter). O halde önce 10 sayı üzerinden yapılabilecek bütün 6 lı seçimlerin sayısını bilmeliyim.

b) Her bir 6 lı seçimden rakkamların sırasını değiştirerek (örneğin 174523, 754231, 132457) kaç farklı numara elde edebilecegimi hesaplamalıyım. Nihayet bu sonucu değişik seçimlerin adediyle çarpmalıyım.

Bu yol akla yakınsa da çözümü güçtür. 10 üzerinden yapılabilecek 6 lı seçimlerin sayısını bulmak için basit bir yol bilmiyoruz.

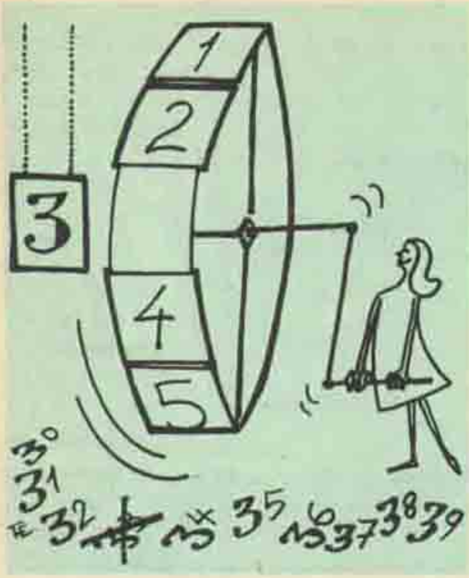
Şimdi problemi daha basit bir yoldan çözüp, 10 üzerinden yapılabilecek bütün 6 lı seçimlerin sayısını veren bir formül bulmıya çalışacağız. Aradığımız sayılarda şu özellik var, bir basamak ekleyince, her bir sayıda daha önceki basamaklarda kullanılmış rakkamlar kullanılmıyor çünkü kullanılmış o'salar aynı rakkamlar tekrarlanmış olacak.



Şekil 1. Herhangi bir sayıdan bir basamak eklemekle 10 yeni sayı türetebiliriz. 3 ten türetilen 10 adet iki basamaklı sayıyı ve nasıl türetildiklerini görüyorsunuz. 0 dan 9 a kadar 10, bir basamaklı sayının her birinden onar türeterek yüz $(10)^2$, 2 basamaklı sayı, yüz 2 basamaklı sayıdan onardan bin $(10)^3$, 3 basamaklı sayı türetebiliriz. Ve bu böyle devam eder, gider.

O halde tek basamaklı sayıları yazarken her 10 sayıdan istifade edebilirim (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Bunların her birinden ikinci basamak ilâvesiyle ancak 9 ar sayı türetebilirim. Çünkü birinci basamakta kullanılmış olan sayıyı kullanmamıya mecburum. Böylece 10 tane tek basamaklı sayıdan 90 (10 X 9) 2 basamaklı sayı; Bu 90 iki basamaklı sayıdan her birinden 8 er tane türeterek —ilk iki basamaktaki 2 sayıyı kullanamam— 720 (10 X 9 X 8) 3 basamaklı sayı; aynı şekilde devam ederek bu 720 üç basamaklı sayıdan 5040 (10 X 9 X 8 X 7) 4 basamaklı sayı; bu 5040 dört basamaklı sayıdan 30240 (10 X 9 X 8 X 7 X 6) 5 basamaklı sayı ve nihayet bu 30240, 5 basamaklı sayıdan 151200 (10 X 9 X 8 X 7 X 6 X 5) elde ederiz. Bu aradığımız sonuçtur. O halde rastgele rakkamları tekrarlamadan telefon çevirsem, rakkamları tekrarlanmıyan aradığım telefon numarasını bulma ihtimalim 1/151200 dir. Yani gene bulamıyacağım. En iyisi rehbere bakmak.

Çeşitli seçimlerin sayısını bulmıya yarıyan bir formül. Bu problemi bu maksatla vermedik. Çe-



Şekil 2. Sayıların değişik basamaklarında aynı rakamların tekrarlanmasını istemiyorsak, bu sefer, herhangi bir sayıdan, bir basamak eklemekle, kaç yeni sayı türetebileceğimizi bulmak için, yeni sayılar türettiğimiz sayının basamak adedini 10 dan çıkarmalıyız. Çünkü yeni basamakta o sayıda bulunan rakamları kullanırsak, değişik basamaklarında aynı rakamların tekrarlandığı sayılar elde ederiz. 3 ten türetilen 33 dışındaki 9 adet sayıyı görüyorsunuz. Yeni basamağı temsil eden çarktan 3 çıkarılmış ve 9 rakam kalmıştır. Böylece 33 elde etmeyi önlemiş oluyoruz. Bu şartlar altında, 0 dan 9 a kadar 10 rakamın her birinden 9 ar sayı türetmekle, 90 (10X9), 2 basamaklı sayı, bu 90 iki basamaklı sayının her birinden 8 (10—2) sayı türeterek 720 (10X9X8), 3 basamaklı sayı elde edebiliriz. Ve yeni sayılar türettiğimiz sayının basamak adedi birer birer arttıkça türetilen sayılar o nisbette azalarak, türetilecek sayı kalmayıncaya kadar bu böyle devam eder.

şitli seçimlerin sayısını bulmıya kolaylık gösteren bir formül bulmak için verdik. Bu formülün ne kadar geniş bir kullanma alanı olduğunu görünce şaşacaksınız. Bu problemi yukarda da söylediğimiz gibi önce 10 üzerinden yapılabilecek farklı 6 lı seçim adedini bulup, bu aeddi 6 unsurun yapabileceği bütün sıraların adedi ile çarparak da çözebilirdik. O halde bulduğumuz 151 200 (10 X 9 X 8 X 7 X 6 X 5) sayısını 6 unsurun yaptığı sıra adedine bölmekle, on üzerinden kaç farklı 6 lı seçim yapabileceğimizi buluruz. 6 unsurun yaptığı sıra adedi ise 6 X 5 X 4 X 3 X 2 X 1 veya kısaca 6!. Ünlem işaretinin bu maksatla kullanışını geçen yazımızda uzun uzun anlatmıştık. $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6! = 720$ sayısını, sıralanan unsurlar aynı sırada ikinci defa yer alamıyacaklarından, sıra birer birer arttıkça, o sıralardan türetilebilecek sıra adetlerinin, birer birer azalacağı mantığına dayanarak bulduk. Tıpkı 151 200 sayısının elde edilişinde olduğu gibi.

Bu sayıyı 151 200 $(10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5)$, 720 $(6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6!)$ ye bölmekle 10 üzerinde kaç farklı 6 seçim yapılacağını bulacağımızı söylemiştik. Şimdi genel bir ifade elde etmek için $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5$ sayısını $4 \times 3 \times 2 \times 1$ [$= 4! = (10\text{-}6)!$] sayısı ile çarpalım (10 dan 6 çıkınca 4 kaldığına dikkat edin). Böylece $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ ifadesini buluruz ki bu kısaca 10! şeklinde yazılabilir. Sonucun değişmemesi için gene aynı sayıya bölelim, böylece:

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = \frac{10!}{4!} = \frac{10!}{(10-6)!} \text{ buluruz.}$$

10 a genel olarak, n, 6 ya genel olarak r dersek böyle bir formül elde ederiz:

$$\frac{n!}{(n-r)!}$$

Bu formül n unsurdan (örneğimizde 10) mümkün olan bütün çeşitli r (örneğimizde 6) tanesini seçerek bunlarla yapılabilecek bütün sıraları verir. Bunu da r unsurun yaptığı sıra adedi r! (örneğimizde 6!) e bölersek, n unsurdan her seferinde r unsur seçilerek kaç farklı seçim yapabileceğimizi veren formülü buluruz.

$$\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Ne o beğenmediniz mi? Biraz ilerde bunun ne kadar yararlı olduğunu görüp bayılacaksınız.

GEÇEN SAYIDA VERİLEN PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

1) 20 zar atarak 2 defa 6 elde etme ihtimalini hesaplayınız. 2 adet 6 elde ettiğimize göre, 2 defa ihtimali (1/6) olan «6» ve 18 defa ihtimali (5/6) olan «6 dışı» bir sayı gelecektir. Bunlar VE halleridir. Bu ihtimalleri çarparız :

$$(1/6)^2 \times (5/6)^{18}$$

iki adet 6 çeşitli şekillerde elde edilebilir. 20 zarın içinden 2 şer 2 şer seçimler yaparak, her çiftte

6 ların çıkmış olduğunu tasarlıyabiliriz. Bu seçimlerin sayısını bulmak için her bir zarın yanına diger 19 zarı teker teker getiririz. Böylece 20 X 19 2 zarlı sıra elde ederiz. Eğer zarlar renkli ise böyle durumlar göreceğiz: Kırmızı - yeşil; Yeşil - kırmızı. Birincisine kırmızı zarla, ikincisine yeşil zarla başladığımız zaman rastlıyacağız. Bu iki durum aynı neticeyi verdiğinden 20 X 19 sayısını 2 ye bölmeliyiz. Bu durumlardan ancak birinin ihtimalini temsil eden yukardaki sayıyı bu adetle çarpmalıyız. Sonuç :

$$\frac{20 \times 19}{2} \cdot (1/6)^{2} \cdot (5/6)^{18} \quad \text{olur.}$$

2) $\dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$ formülü çeşitli VEYA hallerini hesaplamakta kullanılabilir mi?

Evet! Bu formül n şey içerisinden her seferinde r şey seçerek kaç farklı seçim yapabileceğimizi veren formüldür. Yukardaki örnekte çeşitli VEYA ile ifade edilebilecek durumları hesaplamak için 20 şey içerisinden her seferinde iki şey seçiyorduk. O halde n = 20, r = 2.

$$\frac{20!}{2!\,(20\text{-}2)!} = \frac{20 \times 19 \times 18!}{2! \times 18!} = \frac{20 \times 19}{2} = 190$$

($18! = 18 \times 17 \times 16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ ve $2! = 2 \times 1 = 2$ olduğuna dikkat edin).

YENİ PROBLEMLER

1) 10 kişi içerisinden 6 değişik görev için 6 kişilik seçimler yapıyorsunuz. Bu seçimleri kaç farklı şekilde yapabilirsiniz?

2) 10 kişi yolda 6 sinema bileti buluyor, kaç farklı 6 lı grup sinemaya girebilir?

Düzeltme : 34. cü sayımızda 38. ci sahifede Şekil 2'nin üçüncü satırındaki «yetmiyorsa» kelimesi «yetiyorsa» olacaktır. Düzeltir ve özür dileriz.

S I N I R   K O Y M A!

İnsan kafasının, o anda, anlaşılmasını güç bulduğun serüvenlerinden kaçma! «Pratik» insanların olmaz dedikleri şeyler üzerine açık fikirlerle atıl. Belki bizim sandığımızdan daha fazla duyularımız vardır. Binlerce yıldan beri elektrik etrafımızda idi, fakat biz ondan faydalanamıyorduk. Acaba bugün de bu kadar az anladığımız, fakat nasıl olacağını bildiğimiz takdirde anlayabileceğimiz kafanın daha birçok güçlerinin mevcut olmadığından nasıl emin olabiliriz.

A. WHITMAN

Ö L Ç Ü

Basit Amerikan fıstığından mucizeler yaratan ünlü zenci bilgin George Washington Carver şu hikâyeyi anlatırdı :

Küçükken bir gün Tanrıya «Ulu Tanrım, dedim, ne olur, bana evrenin esrarını söyle». Fakat Tanrı şöyle cevap verdi; Onun esrarını bilmek yalnız Bana mahsustur».

Bunun üzerine, «öyleyse bana Amerikan fıstığının esrarını söyle», dedim. «Evet,» dedi, Tanrı, «George, bu hemen hemen senin ölçüne göredir». Ve bana bunun bütün sırlarını açıkladı.