# Gizemli Bir Sayı $\pi$

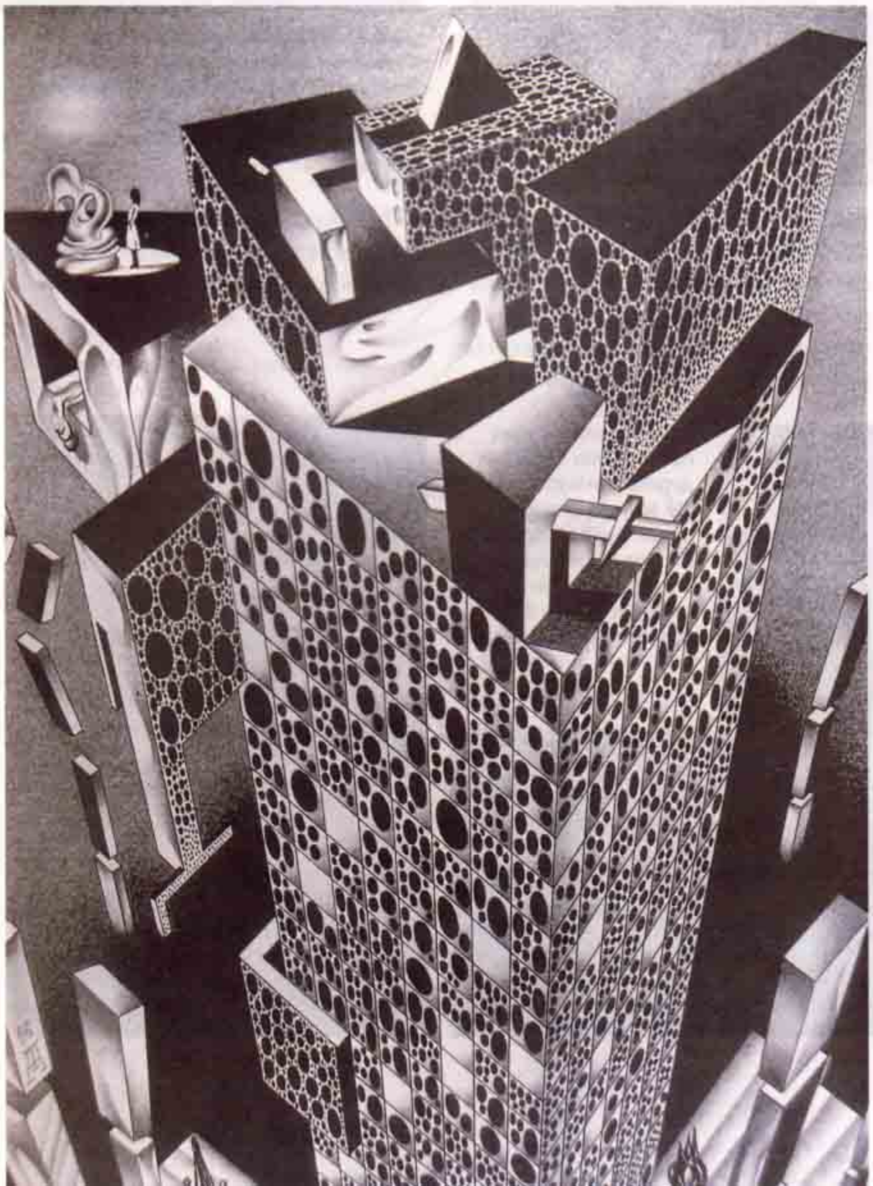
*Herhangi bir çember için "çevre ÷ çap = sabit" bağıntısı doğrudur. Bu, gizemi, böyle bir sabitin varolduğunun farkedildiği ilk zamanlardan beri matematikle uğraşanları saran $\pi$ (pi) sayısıdır. $\pi$''nin nasıl birsayı olduğunu anlayabilmek, sayısal değerini hesaplayabilmek için matematik tarihi boyunca hatırı sayılır bir emek sarfedilmiştir.*

TEKERLEK icat edilmeden önce ilk insanlar, daire benzeri şekilleri doğada görmüş olmalılar; çocuklarının yüzünde, güneşin ya da ayın sudaki aksinde, çiçeklerde, ağaçlarda... Doğal sayıları keşfettikten sonra çemberi tanımlayabilmeleri için belki yüzyıllar geçmesi gerekti ama, sonuçta M.Ö. 2000 yılı civarında, çemberde çevrenin çapa oranının, tüm çemberler için sabit olduğunun farkına vardılar. Böylece bu sabitin, $\pi$ sayısının, serüveni başladı. $\pi$ ile ilgili çabaları, olayları, gelişmeleri sıralamaya niyetlendiğimizde karşımıza çıkan ilk ilginç bulgu, Mısır ve Babillilerin kullandıkları $\pi$ değerinin, bugün bilinen sayısal değerine yakınlığı olur.

Mısırlılar $\pi = 4\left(\frac{8}{9}\right)^2 = 3,16049$ ,Babilliler ise $\pi = 3\frac{1}{8} = 3,125$ değerlerini kullanıyorlardı. Peki, bu insanlar, M.Ö. 2000'li yıllarda bu değerlere nasıl ulaşmışlardı? Kesin olarak bilinmemekle birlikte, az sayıda arkeolojik kalıntıdan yola çıkarak bu konuda bir tahmin yürütülebilir. Mısırlıların matematikle ilgili en eski dokümanı, 1858'de Nil kıyısında Thebes'de yıkılmış bir binada bulunduktan sonra İskoç antikacı Henry Rhind tarafından satın alınan "Rhind Papirüsü"dür. Bu papirüste 84 problem ve çözümü bulunur ve 50. problemde $\pi$ hesabı vardır. Buna göre Mısırlılar, bir daire ile, alanı bu dairenin alanına yaklaşık olarak eşit kabul edilen bir karenin alanlarını karşılaştırarak $\pi$'nin değerini hesaplamaya çalıştılar. Bu değer, Mezopotamyalıların bulduğundan daha kaba bir değerdir. Mezopotamya'da yaşayan Babillilerin ilk ve en gelişmiş matematikçiler olduğu söylenebilir. 1936'da bulunan ve ancak 1950'de okunabilen bir tablette, Babillilerin $\pi$'yi nasıl hesapladıklarına ilişkin bilgiler bulunur. Babilliler, bir dairenin içine düzgün bir altıgen çizip, dairenin çevresinin altıgenin çevresine oranını bularak $\pi$'nin yaklaşık değerini hesaplamışlardı.

Mısırlıların ve Babillilerin daireye, içine çokgenler çizerek yaklaşma yöntemini ünlü bilgin Arkhimedes daha da geliştirerek kullandı. M.Ö. 287-212 yılları arasında Sicilya'da yaşayan Arkhimedes, bir daireyi, içinden ve dışından n kenarlı düzgün çokgenlerle sınırlandırdı. Elde ettiği şekilde, içerideki çokgenin çevresi daireninkinden küçük, dışarıdaki çokgenin çevresi daireninkinden büyüktü. Kenar sayısı n, ne kadar büyük olursa, iki çokgenin çevresi de, biri yukarıdan diğeri aşağıdan, dairenin çevresine yaklaşıyordu.

Arkhimedes düzgün altıgen ile başlanıp kenar sayılarını ikiye katlayarak, 96 kenarlı bir çokgene ulaştı ve $\pi$ için şu alt ve üst sınırları elde etti:



***Ünlü Rus matematikçi A.T. Fomenko, "Olağanüstü Sayılar $\pi$ ve e" isimli bu resminde, $\pi$ ve e sayılarını betimliyor. Resmin merkezindeki heybetli binanın duvarları küçük karelere bölünmüş. Her bir bölmenin içindeki yuvarlaklar, basamak değerini ifade ediyor. Dibi görünmeyen bu binanın ve havada öylece asılı duran şekillerin oluşturduğu ortamda yaşam, heykel seyreden kadının dinginliğinde sürüp gidiyor.***

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

Arkhimedes'in yöntemi, sonraki 1800 yıl içinde, π hesaplamalarında temel alındı.

Ortaçağın ardından matematikte yaşanan önemli gelişmeler, π sayısı üzerinde yapılan çalışmalara da yansıdı. François Viète, belki de Arkhimedes'in yöntemini son kullanan kişi olarak, π için ilk sonsuz açılımı verdi:

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\cdots}}}$$

Bu bağıntıyla karşılaşınca ürkmemek elde değil! Bazıları için geceleri uyku kaçıracak korkunçlukta bir formül olduğu bile söylenebilir. Özellikle de, matematiği birtakım formülleri ezberleyerek öğrendiklerini sanıp, problemleri düşünerek değil, formülleri hatırlayabildikleri sürece çözenler için! Sıkı durun daha neler göreceğiz:

Buna benzer diğer formülü, John Wallis veriyor:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6.8.8\ldots}{1.3.3.5.5.7.7.9.9\ldots}$$

Peki Brouncker Kesiri'ne ne dersiniz:

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \ldots}}}$$

π'nin bir tarafta durduğu bu eşitliklerin diğer tarafında, rakamlar ürkütücü bir ahenk sergiliyorlar. Bu ahengin çekiciliğine kapılmamak olanaksız. Rakamların birbirleriyle olan ilişkilerinin sergilediği garip düzenlilik ve süreklilik, insana π'nin büyülü olduğunu düşündürüyor.

Ama gerçekte bunlar, integral ve diferansiyel tekniklerinin kullanılmasıyla kolaylıkla elde edilebilecek formüller. Tahmin edeceğiniz gibi, diferansiyel ve integral teorilerin kurulması π sayısı hesaplamalarını geliştirdi. Bu yeni yöntemler hem daha çok basamak hesaplanmasına hem de π'nin özellikleri hakkında daha çok bilgi edinilmesine olanak verdi.

İskoç matematikçi James Gregory'in 1671'de kullandığı yöntem, gelecekte π hesabının seyrini değiştirecek kadar güçlüydü. Gregory arctanx seri açılımını kullanarak

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

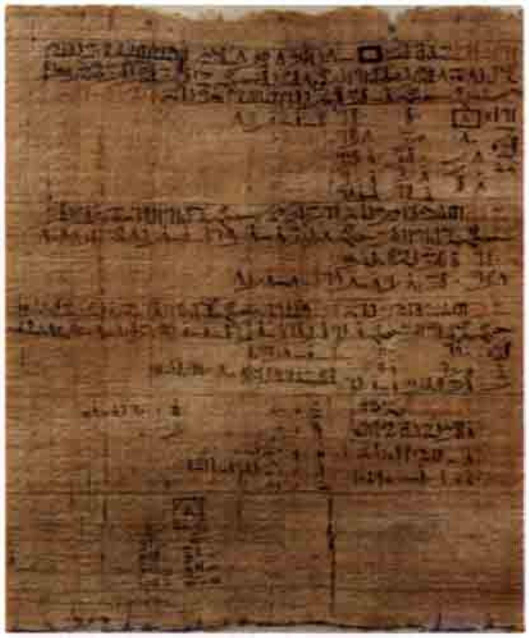
değerini buldu. Seri açılımı kullanılarak yapılan bu hesaplama o kadar yayıldı ki, Newton ve Leibnitz gibi ünlü matematikçiler bile π'nin basamaklarını hesaplamakla uğraştılar. Hatta 1706'da John Machin, benzer yöntemlerle π sayısını 100. basamağa kadar hesapladı. Bu çabalar, π için daha iyi bir değer bulmanın ve bu sayının belirdiği hesaplamaların iyileştirilmesinin ötesine geçti. Yukarıdaki bağıntılardaki ahengi π'nin basamakları arasında yakalama umudu, matematikçileri yüzyıllar boyunca, bu sayının ondalık basamak değerlerini hesaplamaya itti.

## Basamak Avcıları

Özellikle amatör matematikçilerin π sayısı üzerine yaptığı çalışmalar basamak değeri hesaplamalarında yoğunlaşıyor. Logaritma ve ondalık kesirlerin kullanılmaya başlanmasından ve özellikle integral ve diferansiyel teknikleri gibi güçlü silahlarla donanmazdan önce matematikçiler için bu iş, başa çıkılması zor bir hesap yüküydü. Şimdi ise, 20. yüzyılda matematikçilerin elinde çok daha güçlü bir silah var: bilgisayarlar! Hızlı hesap yapabilme ve bilgi saklayabilme yetileriyle bu makineler, matematikçilere akıl almaz imkanlar tanıdı. İlk bilgisayar ENIAC, 1949'da π'yi 2037. basamağına kadar hesaplamıştı. Dünyanın pek çok yerinde pek çok matematikçi, bugün hâlâ daha iyi algoritmalar bularak ve daha gelişmiş makinelerle, π'nin daha çok basamağını hesaplamaya çalışıyor. Eylül 1995'de Tokyo Üniversitesi'nden Daisuke Takahuski ve arkadaşları, yeni bir rekor kırarak, π'yi 6 442 450 000 basamağına kadar hesapladılar.

π'nin, örneğin 17. basamağından sonrasını bilmenin pratik bir değeri olmadığı düşünülebilir. Öte yandan, π'nin "normal" bir sayı olup olmadığı da hâlâ tam yanıtlanabilmiş bir soru değildir. Yani, π'in basamakları arasında bir ilişki, bu ilişkinin bir kuralı var mı? 31459 gibi diziler düzenli olarak ve aynı sıklıkla beliriyorlar mı? İlk 30 milyon basamaktan sezilen, yanıtların olumlu olduğu ... Ama henüz kesin bir kanıt ortada yok.

Basamak avcılarının, π üzerinde yoğunlaşmaları ilginç bir olgudur. Aynı girişim, √2 , sin1 veya log2 sayılarının ondalık basamakları için yapılmamıştır. π'nin basamaklarını ezberlemeye çalışanlar, aynı çabayı √2 için göstermezler. Bu durumun matematiksel bir açıklaması da yoktur. Aslında √2, √3'den



*Rhind Papirüsü, 47 ve 48. problemler*

çok farklı bir sayı değil; sin1 de sin2'den, ama π tek! Ya da, en azından, ilk matematikçiler π gibi bir sayıyla karşılaştıklarında böyle düşündüler. π'nin ne tür bir sayı olduğunun anlaşılmasıyla, ona benzer bir çok sayının varlığı da ortaya çıktı.

## Pi Ne Tür Bir Sayı?

π'nin nasıl bir sayı olduğu sorusunu ilk Euler ortaya attı. π rasyonel mi, irrasyonel mi? Cebirsel mi, aşkın mı? Eski Yunanlılar, Pythagoras ve çevresindekiler, √2 sayısı ile rasyonel olmayan, yani p ve q gibi tamsayılar için, p/q cinsinden ifade edilemeyen sayılar bulunğunu keşfetmişlerdi. Bu sayılara irrasyonel sayılar denir. π'nin irrasyonelliğini 1767 yılında J.H. Lambert kanıtladı. Lambert bazı özel kesirleri araştırırken şu teoremi ortaya attı:

"Eğer x sıfırdan farklı rasyonel bir sayı ise, tanx rasyonel olamaz" Bu teoremin ardından hemen "Eğer tanx rasyonel sayıysa, x ya irrasyoneldir ya da sıfırdır" diyebiliriz. Böylece tanx'i bildiğimiz zaman, x'in nasıl bir sayı olduğu hakkında bilgi veren bir teorem elde ederek π'nin irrasyonelliğini kanıtlayabiliriz. Nasıl mı?

$\tan\frac{\pi}{4} = 1$ olduğunu biliyoruz. 1 rasyonel bir sayıdır, o halde π/4 ve tabii ki π irrasyonel olmak zorundadır.

Euler'in zamanında matematikçiler, irrasyonel sayılardan da beter sayıların varlığından şüphe ediyorlardı. Hiçbir cebirsel polinomun kökü olmayan sayılar gibi. Cebirsel bir polinom : $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = 0$ olarak tanımlanır. Bu ifadede polinom derecesi en'ler (0,1,2,.....,n), pozitif tamsayılar ve katsayılar ( $a_0$, $a_1$,

$a_2$,..., $a_n$), sıfırdan farklı rasyonel sayılardır. Bu polinomun kökleri olabilen sayılara cebirsel, bu koşulu sağlamayan sayılara ise aşkın (trancendental) sayı denir. (Örneğin $x^2 - 2 = 0$ polinomu için $\sqrt{2}$, bir köktür ve cebirsel bir sayıdır.)

Aşkın sayıların varlığı J. Liouville tarafından 1840'da kanıtlandı. Peki π'nin aşkın sayı olup olmadığı nasıl kanıtlanır? Legendre 'Geometrinin Ögeleri' adlı kitabında (1794), π'nin cebirsel bir denklemin kökü olmayabileceğini sezinlemiş ve bunun kesin ispatının zor olacağını belirtmişti. 88 yıl sonra F. Lindeman, C. Hermite'nin e sayısının aşkın olduğu bilgisine dayanarak, şu teoremi kanıtladı:

"Eğer r, s, t, ..., z ve a, b, c, ..., n birbirinden farklı, gerçel (reel) veya karmaşık cebirsel sayılar ve içlerinden en az biri sıfırdan farklı ise,

$ae^r + be^s + ce^t + ... + ne^z \neq 0$"

Bu teorem ne demek istiyor?

$ae^r + be^s + ce^t + ... + ne^z$ ifadesinin sıfıra eşit olması, katsayıların (a, b, c, ...,n) hepsinin sıfıra eşit olması durumunda mümkündür. Çünkü $e^x$, bütün x'ler için her zaman sıfırdan büyüktür. Ama Lindeman, teoreminde, katsayılardan en az birini sıfırdan farklı seçiyor. Bu koşulda $ae^r + be^s + ce^t + ... + ne^z$ ifadesi sıfıra eşit olamayacaktır. Teoremdeki asıl can alıcı nokta, e'nin üstleri olarak seçilen r, s, t, ..., z'nin ve katsayılar a, b, c, ..., n'nin cebirsel sayı olmaları koşuludur. Teorem, eğer bu sayılar cebirselse $ae^r + be^s + ce^t + ... + ne^z$ toplamı sıfır olamaz diyor. Peki, toplam sıfıra eşit olursa? O zaman, bu sayılardan herhangi birinin cebirsel olmadığını, yani aşkın sayı olduğunu söyleyebiliriz. π'nin aşkınlığını da buna dayanarak göstereceğiz:

a=b=1 ve c'den n'ye kadar bütün diğer katsayıları sıfır; üstlerden s= 0; r = iπ seçelim. Bunları $ae^r + be^s + ce^t + ... + ne^z$ ifadesinde yerlerine koyarsak $e^{i\pi} + 1$ elde ederiz. Euler, $e^{i\pi} + 1 = 0$ olduğunu daha önceden kanıtlamıştı. Lindeman'ın teoremi, böyle bir eşitliği cebirsel bir sayının sağlayamayacağını ileri sürüyor. Yani r = iπ aşkın olmalıdır. i, cebirsel bir sayı olduğuna göre π, aşkındır.

## $\hat{\pi}$ ve π

Matematiğin yapılanma tartışmaları içinde üç standart dogma bulunur: Platonculuk (Platonism), Biçimcilik (Formalism) ve İnşacılık (Constructivism). Biçimciler, matematiğin daha önce belirlenmiş kurallara ve uzlaşmalara dayanarak bir araya getirilmiş biçimsel simge ve ifadelerden oluştuğunu düşünürler. Platonculara göre matematik insandan bağımsız olarak hep vardı ve hep var olacak. Matematikçinin yaptığı iş, bu ilişkileri keşfetmektir. Biçimciler ve Platoncular, gerçeklik ve varoluş sorunlarında karşıt görüşleri savunmalarına rağmen, akıl yürütme yöntemleri üzerinde anlaşırlar. İnşacılar ise iki akıma da karşı çıkarlar. İnşacılara göre, tüm matematik, doğal sayılardan başlayarak sonlu sayıda aşamada inşa edilebilir. Böylece, matematiksel nesnelerin gerçeklikleri ve varlıkları anlam kazanır. Bu görüşe göre klasik matematikte birçok teorem geçersizdir.

İnşacı matematiği kuran Hollandalı topolojist L.E.J. Brouwer, 1900'lerin başında "Trikotomi Yasası"na (Trichotomy Law) karşı ürettiği örnekte π sayısını kullanmıştır. Trikotomi Yasası'na göre, tüm gerçek sayılar ya pozitif, ya negatif ya da sıfır olmak durumundadır. Gerçel sayılar, Dedekind ve Cantor'un küme teorisiyle inşa edildiği zaman, bu önerme kanıtlanabilir ve analizde önemli rol oynar. Brouwer, pozitif mi, negatif mi, sıfır mı olduğuna karar verilemeyen gerçel bir sayı örneği veriyor:

Acaba π'nin ondalık basamaklarının bir yerinde, 100 tane sıfır art arda sıralanıyor mu? "Bu soruyu sormanın ne anlamı var?" denilebilir ama, Brouwer, örneğini bu sorunun cevabına bağlı olarak kuruyor.

$\hat{\pi}$ (pi şapka) adında, π'ye çok benzeyen, hatta belli bir basamağa kadar, belli bir koşulda π ile aynı olan bir sayı tanımlanabilir:

(i) Eğer π'nin içinde 100 tane sıfır yok ise $\hat{\pi} = \pi$ olsun.

(ii) Eğer π'nin n basamağından sonra 100 tane sıfır var ve n tek sayı ise $\hat{\pi}$, n'inci basamağından sonra sona ersin.

## Pi Sayısının Hesaplanma Yöntemleri

Mısırlılar'dan kalan ünlü doküman Rind Papirüsü'nde, 50. problemde, bir kenarı 8 birim olan bir karenin alanının, çapı 9 birim olan bir dairenin alanına eşit olduğu kabul edilerek π değeri hesaplanmıştır. Mısırlılar, dairenin alanının $\pi r^2$, karenin alanının ise $a^2$ olduğunu önceden biliyorlardı ve $\pi(9/2)^2 = 8^2$ bağıntısı elde ederek $\pi=4(8/9)^2$ değerini buldular.

Papirüsün 48. probleminde, neden böyle bir "kare-daire" seçimi yapıldığını anlamamızı sağlayacak bir ipucu var. Bu problemde, kenar uzunluğu 9 birim olan bir kare ile bu karenin çevrelediği bir daire karşılaştırılıyor. Kare ve daire arasına düzgün olmayan bir ABCDEFGH sekizgeni çizilebilir (Şekil a). Kolayca 63 birim olarak hesaplanabilecek bu sekizgenin alanı, dairenin alanına yaklaşık olarak eşittir. 63, $64=8^2$ sayısına yakın bir sayıdır. Bunu farkeden Mısırlılar, bir kenarı 8 birim uzunluktaki bir kare ile çapı 9 birim uzunluktaki bir dairenin alanlarını yaklaşık olarak eşit kabul etmişlerdir. Böyle bir kare daire seçimiyle, π=3,16049 olarak hesaplanabilir

Babilliler, daire içine düzgün bir altıgen çizerek, bu altıgenin çevresinin kendini çevreleyen çemberin çevresine oranını buldular (Şekil b). Bu oran, günümüz notasyonuyla $\frac{57}{60} + \frac{36}{(60)^2}$ olarak belirlenmişti. Babilliler bu orana dayanarak:

$$\frac{\text{altıgenin çevresi}}{\text{çemberin çevresi}} = \frac{6r}{2\pi r} = \frac{3}{\pi} = \frac{57}{60} + \frac{36}{(60)^2} \text{ ve } \pi = 3\tfrac{1}{8} = 3.125$$

sonucuna ulaşmışlardı.

Arkhimedes, çemberi içinden ve dışından n kenarlı düzgün çokgenlerle sınırladı. Bu çokgenlerin çevrelerini hesaplayıp, π için yaklaşık değerler elde etti:

Eğer $\theta = \frac{\pi}{n}$ düzgün çokgenin bir kenarının karşısındaki açının yarısı, çemberin çevrelediği çokgenin bir kenarının uzunluğu da $c_1$ ise, $c_1 = 2r \sin\theta$, çemberi çevreleyen çokgenin bir kenarının uzunluğu $c_2$ ise, $c_2 = 2r \tan\theta$ olarak bulunur. Bu durumda çemberin çevresi c ise, $nc_1 < c < nc_2$, yani

$2rn \sin\theta < 2\pi r < 2rn \tan\theta$ olur ve her iki taraf da 2r'ye bölünürse,

$n \sin\theta < \pi < n \tan\theta$ elde edilir. Eğer kenar sayısı n, k kadar ikiye katlanırsa

$2^k n \sin\theta < \pi < 2^k n \tan\theta$ elde edilir.

k, yeterince büyük olduğu zaman, elde edilen eşitsizlikte π'nin üst ve alt sınırları birbirine yaklaşacaktır.

Arkhimedes, bu hesaplamayı yaparken, doğaldır ki, o zamanlar henüz tanımlanmamış trigonometrik fonksiyonları kullanmadı. Ama n= 6 için $\sin\theta = 1/2$ ve $\tan\theta = 1/\sqrt{3}$ değerlerini Pythagoras teoreminden buldu. Bilindiği gibi $\sin\theta$, bir açısı θ olan dik üçgende, θ açısının karşısındaki kenarın hipotenüse oranıdır. Arkhimedes, bu oranları kullandı. Ayrıca, çokgeni inşa etmek için kullandığı dik üçgenlerin birbirlerine oranlarını kullanarak elde ettiği yarımaçı formüllerinden $2^k n \sin\theta < \pi < 2^k n \tan\theta$ bağıntısını elde etti. Dikkat edilirse, bu bağıntıda k=4, n=6 için 96 kenarlı bir çokgen elde edilir.


Şekil-a Şekil-b Şekil-c

Bu durumda $\hat{\pi} < \pi$ olacaktır.

(iii) Eğer $\pi$'nin n basamağından sonra 100 tane sıfır var ve n çift sayı ise $\hat{\pi}$'nın, (n+1)'inci basamağında 1 sayısı olsun ve ondan sonra sona ersin. Bu durumda $\hat{\pi} > \pi$ olacaktır.

$\pi$'nin gerçek basamak değerleri göz ardı edilerek örneklenirse, $\hat{\pi}$ ve $\pi$'nin birbirlerine göre konumları daha iyi anlaşılacaktır :

n = 9 tek sayısı için

$\pi$ = 3, 1415926530000.....0364338..

$\hat{\pi}$ = 3,14159265300

ve $\hat{\pi} < \pi$ n = 8 çift sayısı için

$\pi$ = 3,14159265000.....01364838...

$\hat{\pi}$ = 3,14159265310

ve $\hat{\pi} > \pi$ şimdi P = $\hat{\pi} - \pi$ sayısı tanımlanabilir. P, pozitif mi, negatif mi, sıfır mı? Eğer (i) doğru ise P = 0, çünkü $\hat{\pi} = \pi$; (ii) doğru ise P < 0, çünkü $\hat{\pi} < \pi$ ; (iii) doğru ise P > 0, çünkü $\hat{\pi} > \pi$ olduğu görülebilir. Peki, bu önermelerden hangisinin doğru olduğunu nasıl bileceğiz? Bilgisayarlar 100 tane sıfırın bulunduğu basamakları, eğer varsa tabii, hesaplayıncaya kadar bunu bilmemiz olanaksız. Önümüzdeki 100 yıl içerisinde böyle bir veriye ulaşılamazsa ne olacak? İş bilgisayarlara düştü ve matematiksel doğruluk zamana bağımlı hale geldi! Diyelim ki, böyle sıfırlar bulundu. Bu örnek, aynı mantıkla ve başka basamak özellikleri tanımlanarak yeniden kurulabilir. Öyle ya da böyle, bir P sayısı tanımlanabilir ve P sayısı, gerçel bir sayı olarak Trikotomi Yasası'nın gereğini yerine getirmez!

İnşacı matematik, klasik matematiğin birçok bulgusunu olumsuzlamaktadır. David Hilbert, İnşacılar için şunları söylüyor: "Matematiği, problem çıkaran her şeyi denize atarak korumanın yollarını arıyorlar... Eğer onların önerdiği reformları izleseydik, değerli hazinemizin büyük bölümünü kaybetme riskine girecektik."

## Neden Pi ?

Matematikte hiçbir sayıya $\pi$ kadar emek verilmediğini söylemek herhalde yanlış olmaz. Bugün hâlâ $\pi$ sayısından etkilenen birçok matematik tutkunu, bu sayısının basamaklarını ezberlemeye ve hesaplamaya çalışıyor. "$\pi$ fanatikleri"nden bile söz etmek mümkün. $\pi$'nin basamaklarını ezberlemede yarışa girmiş bu insanlardan bazıları sadece bununla kalmayıp basamakları notalarla eşleştirerek oluşturdukları küçük bir melodi eşliğinde "$\pi$ dansı" yapıyorlar. Notalarla basamaklar eşleştirilebildiği gibi, kelimelerle de eşleştirilebiliyor. Her basamağa karşılık, basamak değeri kadar harften oluşan kelimelerle $\pi$ sayısı bir şiire dönüştürülebilir:

"...

*Bak o ölüm o dirim ülkesinde ne oluyor*
*3 1 4 1 5 9 2 6*
*Mezar aşk kadar soğuktur sananlara ölümsüz kahramanı sor*
*5 3 5 8 9 7 9 3*
*En öte ülkedeki uzak denizeöç ırmağı akar*
*2 3 8 5 6 2 6 4*
*Tek bir kahraman aşk ve intikam isteğiyle yanar*
*3 3 8 3 2 7 9 5*

..." *(Gökhan Tok)*

$\pi$'yi bu kadar özel kılan, insanların neredeyse tapındığı kutsal bir sayı haline getiren nedir? Galiba ilk göz ağrısı, ilk aşk olması! İnsanoğlunun sadece tam ve rasyonel sayıları bildiği zamanlarda ortaya çıkan $\pi$ sayısı, o bilgilerle ifade edilemeyecek kadar sır doluydu. Bu sayının anlaşılabilmesi yüzyıllar aldı. Bilim tarihi boyunca birçok bilim adamı ve matematikçi, şu ya da bu şekilde $\pi$ ile ilgilenmiştir. Bugün $\pi$'nin irrasyonel ve aşkın bir sayı olduğunu biliyoruz. Cantor'un, aşkın sayılar kümesinin sayılamaz olduğunu ispatladığını da biliyoruz. Bu, $\pi$'ye benzer sayılamayacak çoklukta sayı var demek. Ama $\pi$ yine de tek!

Saadet Koç


Kaynaklar

Barwein, J. *Pi and the AGM*, New York, 1987.

Beckmann, P. *A History of π (Pi)*, Colorado, 1971.

Boyer, C. *A History of Mathematics*, London, 1968.

Robins, G. ve C. Shute, *The Rhind Mathematical Papyrus*, London, 1990.

http://www.primus.com/staff/paulp/useless/pi.html


## Monte Carlo Yöntemi

Tarihçesi 16. yüzyıla kadar uzanan olasılık teorisi, 20. yüzyılda temellendirilmiştir. Ancak bu yüzyılda, fizikçiler ve mühendisler, gerçel dünyada ve doğada meydana gelen rastgele olayların ve bunları yöneten yasaların öneminin farkına vardılar.

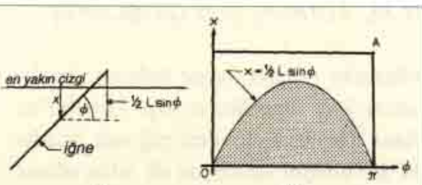
$\pi$ sayısı, diğer tüm matematik dallarında olduğu gibi, olasılık teorisinde de sıklıkla görülür. "Buffon'un İğne Deneyi" buna iyi bir örnektir.

Buffon Kontu G. Louis Leclerc, 1777'de şu problemi ortaya attı:

"L uzunluğunda bir iğne, üzerinde iğne uzunluğundan daha uzun bir d aralığında çizgiler olan yatay bir düzleme rastgele atılsın. İğnenin çizgilerden birine değme olasılığı nedir?" (Burada "rastgele", iğnenin orta noktasının, her konumunun eşit olasılıkta olduğu anlamındadır).

İğnenin orta noktasının en yakın çizgiye uzaklığı x, ve iğnenin çizgilere göre yönü $\phi$ olsun (Şekil a). Şekilden anlaşılacağı gibi $x < \frac{1}{2} L \sin\phi$ koşulu sağlandığında iğne çizgiye değer. x'in bu koşulu sağlama olasılığını bulmak için (x, $\phi$) kartezyen koordinat sisteminde, 0 < x < d/2 ve 0 < $\phi$ < $\pi$ koşullarını sağlayan noktalardan oluşan bir dikdörtgen tanımlanabilir (Şekil b). İğne rastgele atıldığı için, dikdörtgen içindeki her nokta eşit olasılıklıdır. İğnenin çizgiye değmesi ise $x = \frac{1}{2} L \sin\phi$ eğrisinin altındaki noktalarda olasıdır.

Tercih edilen olayların, tüm olaylara oranı P'yi, yani olasılığı verirse:




(a) (b)

$$P = \frac{\text{taralı bölgenin alanı}}{\text{dikdörtgenin alanı}}$$

yani:

$$P = \frac{\int_0^{\pi} \frac{1}{2} L \sin\phi \, d\phi}{\frac{d\pi}{2}} = \frac{2L}{d\pi}$$

ve bu bağıntıdan $\pi = \frac{2L}{dP}$ elde edilir.

P, deneyin sürekli yinelenmesiyle ve çizgiye değen iğnelerin tüm deney sayısına bölünmesiyle bulunabilir. L ve d bilindiğine göre, $\pi$ için yaklaşık bir değer hesaplanabilir.

ODTÜ Matematik Topluluğu'nun 1989'da yaptığı Buffon'un İğne Deneyi'nde, L=8 cm uzunluğunda bir iğne, d=16 cm aralıklardan oluşmuş düzleme 3000 kez atılmış ve 3000 atıştan 955'inde iğnenin çizgiye değdiği gözlenmiştir. Bu verilerden hareketle: $P = \frac{995}{3000}$ ve $\pi = \frac{2L}{dP} \cong 3.14$ olarak bulunmuştur.

Bu problem ve yanıtı, ünlü Fransız matematikçi P.S. Laplace'in, modern olasılık teorisinin temellerini atan "Olasılığın Analitik Teorisi" (1812) adlı kitabında, yeni bir bakış açısıyla gündeme getirilinceye kadar unutulmuştur. Laplace, sayısal bir değerin, rastgele olayların çok sayıda tekrarlanması ve deney sonuçlarının yardımıyla bulunması yöntemini öne sürmüştü. Pek çok uygulama alanı bulan bu tür yöntemlere, şansa dayanması nedeniyle "Monte Carlo Yöntemi" adı verilir.