Dikkat: Kara Delikler İş Başında!

Herkes uzaydaki kara delikleri duymuştur. Ya dünya üzerindeki matematiksel kara deliklere ne demeli?

Michael ECKER

Sisyphus Dizisi

Yunan mitolojisindeki bir öyküye göre, ağır bir taşı dağın tepesine taşımakla yükümlendirilmiş olan Sisyphus, çalışır çabalar ama ağır taş daha tepeye ulaşamadan her seferinde elinden kayar ve dağdan aşağı yuvarlanır.

Aynı şey matematikte de başınıza gelebilir. Herhangi bir sayı dizisiyle işe başlayın - diyelim ki 9288759 - ve sırasıyla dizideki çift rakamları, tek rakamları ve toplam rakam sayısını yazın. Bunlar sırasıyla 3 (üç çift), 4 (dört tek) ve 7'dir (toplam 7 sayı var). Yeni bulduğunuz bu sayı dizisiyle, yani 347 ile yeniden işleme başlayın. Aynı işlemi 347 için tekrarladığınızda bulduğunuz dizi 123'tür. İşlemi 123 ile tekrarlarsanız yine 123 elde edersiniz. 123 sayısı, sayılar evreninde bu işleme göre, matematiksel bir kara deliktir.

Acaba bütün sayı dizileri sonuçta 123 kara deliğine mi düşer? Bu sefer gerçekten çok büyük bir sayı ile deneyelim, örneğin 122 333 444 455 555 666 666 777 777 788 888 888 999 999 999. Bu örnekte çift, tek ve toplam sayılar sırasıyla 20, 25 ve 45'tir. Bunları bir sayı dizisi olarak yazarsak 202 545 sayısını elde ederiz. İşlemi bununla tekrarlarsak yeni sayımız 426 olur . (4 çift, 2 tek, 6 toplam) 426'yı işleme koyduğumuzda 303'ü elde ederiz ki, son işlem 303'ü yine 123'ün içine çeker.

İki anahtar özellik vardır. Birincisi, bir kez 123'e düşerseniz, geri çıkamazsınız. İkincisi, işleme konarak kara deliğin çekim alanına giren her sayının sonu, onun içine düşmektir. Hangi sayıyla başlarsanız başlayın, ne kadar sık bu işlemi tekrarlarsanız tekrarlayın, er geç 123'e ulaşırsınız. İkinci özellik sizi kara deliğin içine çeker, birincisi ise kapana kısılmanızı garantiler.

Sisyphus dizisi nasıl çalışır? Benim açıklamam şöyle: Büyük girdiler daha küçük çıktılar verir; böylece sonsuz bir evren, uygun bir sınırlı evrene taşınır. 123 kara deliği için şöyle düşünebilirsiniz: Eğer sayı 999'dan büyükse, o zaman çift, tek ve toplamdan oluşan yeni sayı daha küçüktür. Sonuçta 1000 veya 1000'den daha büyük sayılar sizi 1000'in altına çeker.

Bilgisayar ile 1000'den küçük bütün sayıların 123'e çekildiğini denedim, ama kalem-kağıt ispatı aslında daha çabuk ve kolay. Herhangi bir üç basamaklı sayi dizisinde sırasıyla çift rakam, tek rakam ve toplam rakamdan oluşan yeni dizi (0, 3, 3), (1, 2, 3), (2, 1, 3), (3, 0, 3)'ten biri olmak zorundadır. Böylece, 1000'den küçük bir sayıyla başlarsanız, ilk işlemin sonunda bu dörtlüden birine ulaşırsınız ve ikinci işlem de sizi mutlaka 123'e ulaştırır; yani kara delik, Sisyphus sayısına.

Kelimelerden Sayılara

Matematiksel oyunlarıyla ün kazanmış matematikçi Martin Gardner, bana başka bir kara delikten söz etti. Herhangi bir tam sayı alın ve sayıyı ingilizce olarak, harflerle yazın, tıpkı "five", 5 örneğindeki gibi.

Sayıdaki harf sayısını sayın. Bu örnekte harf sayısı 4. Aynı işlemi 4 için uygulayın. "Four", 4, böylece yeni bir kara deliğe ulaştınız, yani 4'e.

Başka bir sayı deneyin, örneğin 163. Karışıklık yaratmamak için gerekli yerlere boşluk ve tire de katın. Böylece 163, yani "one hundred and sixty-three", toplam 27 yazı karakterine sahiptir. İşlemi 27 için tekrarlarsanız 12, sonra 6, sonra 3, sonra 5 ve nihayet 4'e ulaşırsınız. Her ne kadar bu yöntem açıklıkla konuşulan dile bağımlıysa da, diğer diller de benzer özelliklere sahip olabilir; ancak kara delik 4 olmayabilir.

Narsistik Sayılar

0 ve 1'in dışında, rakamlarının küplerinin toplamı kendisine eşit olan sayılar, sadece 153, 370, 371 ve 407'dir (Bir sayının kübü, kendisi çarpı kendisi çar-

pı kendisidir. Örneğin, 2'nin kübü, $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$). Evrenimizi bu sayılardan sadece bir tanesi kara delik oluşturacak şekilde seçebiliriz. Örneğin, 153'ü kara delik yapmak için, 3'ün katı olan herhangi bir tam sayıyla başlarız. Bir sayının üçün katı olup olmadığını anlamak için kestirme yol vardır. Sayının rakamlarını toplayın ve sonucun 3'ün katı olup olmadığına bakın. Örneğin, 111 111, 3'ün katıdır; çünkü rakamlarının toplamı olan 6, 3'ün katıdır. Oysa 1 111 111, 3'ün katı değildir.

Bu aşamada bir hesap makinesi ve biraz kağıt gerekebilir. Seçtiğiniz, 3'ün katı olan sayıyı yazın. Birbiri ardına sayınızın rakamlarının küplerini hesaplayın. Bu sonuçları toplayıp, yeni bir sayı elde edin. Şimdi bu işlemi yeni sayı için tekrarlayın.

432 ile başlarsanız örneğin, o zaman

$4^3 + 3^3 + 2^3 = 99$
$9^3 + 9^3 = 1458$
$1^3 + 4^3 + 5^3 + 8^3 = 702$
$7^3 + 0^3 + 2^3 = 351$
$3^3 + 5^3 + 1^3 = 153$
$1^3 + 5^3 + 3^3 = 153$
.... ve kara deliğin içindesiniz!

Bu yöntemin işleme nedeni yine büyük sayıların azalmasıdır. Evren seçimimiz bizi, 407 gibi 3'ün katı olmayan başka kara deliklere sürükleyebilir.

Oyun Kağıdı Hileleri

İşte size değişik gelecek, ama kara delik ilkelerinin ikisini de içeren yeni bir örnek. 52'lik bir deste kağıttan rastgele 21 tanesini alın. Bunları yüzleri yukarıya bakacak şekilde yedi yatay, üç dikey sıra halinde dizin. Arkadaşınıza bu kağıtlardan birini aklından seçmesini isteyin, ama sakın size hangisini seçtiğini söylemesin. Şimdi ona seçtiği kartın hangi dikey sırada olduğunu sorun. Kartları o dikey sıra ortada kalacak şekilde, dikey grupları elinize alarak toplayın ve yine yatay sıralar halinde (7 yatay, 3 dikey), yüzleri yukarıda olacak şekilde dizin. Arkadaşınıza seçtiği kartın bu kez hangi dikeyde olduğunu sorun ve yine o dikey ortada kalacak şekilde kağıtları toplayın.

Aynı işlemi son bir kez daha tekrarlayın.

Şimdi, seçilen kağıt her zaman kağıt diziminin merkezinde, yani 4. yatay ve 2. dikey sırada olacaktır. Bunu ispatlamanın en az iki yöntemi vardır ama en kolayı seçilmiş kağıdın her seferinde nerede olacağını gösteren şemayı çizmektir.

Kaprekar Sabiti

Bununla birlikte, çoğu kara delik sayılardan oluşur. Dört rakamı da tamamen aynı olmayan herhangi bir 4 basamaklı sayı alın. Bu sayının rakamlarının yerlerini değiştirerek elde edeceğiniz en büyük sayıdan, en küçük sayıyı çıkarın. Bulduğunuz fark ile işleme yeniden başlayın.

Örneğin 8028 ile başlayın. Bu sayıdan elde edeceğiniz en büyük sayı 8820, en küçük sayı 0288'dir. Farkları ise 8532.

Aynı tarzda, işleme tekrar 8532 ile başlayın ve 8532 - 2358 = 6174'e ulaşın. Kendi seçeceğiniz bir örnek, biraz daha fazla işlem gerektirebilir, ama her seferinde Kaprekar sabiti olarak anılan kara deliğe, yani 6174'e ulaşırsınız, hem de en çok yedi işlemde!

Çözülmemiş Problemler

Klasik çözülmemiş problemler bile sizi, kara delik olan veya kara delik olduğu ısrarla varsayılan sayılara ulaştırabilir. Bunun bir örneği de "Collatz Varsayımı" dır. Bu varsayım 1930'lardan kalmıştır ve halen açık problemdir.

İşte yöntem: Bir doğal sayıyla işe başlayın. Eğer sayınız tekse, onu 3'le çarpıp, 1 ekleyin. Eğer sonuç çift sayıysa veya eğer işe çift bir sayıyla başladıysanız, bu sayıyı ikiye bölün. Bu işlemi sınırsızca tekrarlayın. Collatz varsayımı soruyor: Bu işlem her zaman 1 ile mi sonuçlanır? Eğer 5 ile başladıysanız, önce 16, sonra 8, sonra 4, sonra 2, sonra 1, sonra 4, 2, 1, sonra 4, 2, 1 ... elde edersiniz. Denemeler gösterir ki, ne ile başlarsanız başlayın, elde edeceğiniz döngü hep 4, 2, 1'dir; ama bunun doğruluğu veya yanlışlığı henüz ispatlanamamıştır.

(4, 2, 1) uzunluğu üç olan bir döngüdür ve biz aslında, döngü uzunluğu bir olan kara deliklerle ilgileniyoruz. Ancak bu üçlü döngüden kurtulabiliriz. Başlangıç sayısını alın ve 1'i de bir çarpan kabul ederek sayıyı asal çarpanlarına ayırın. Bu çarpanlardan en büyük tek olan çarpanı seçin ve bunu üçle çarpın. Bu, demin anlatılan işlemi çabuklaştırıcı bir yöntemdir. Örneğin, 84 aslında $2 \times 2 \times 3 \times 7$'dir. En büyük tek çarpan bu örnekte 7'dir. $3 \times 7 = 21$. Elde ettiğiniz sayıya 1 ekleyin ve işleme yeniden başlayın. Birkaç örnek denerseniz, dönüp dolaşıp, 4 sayısına ulaştığınızı görürsünüz. Bir kez 4'e gelince, 4'te kalırsınız zira 4'ün en büyük tek çarpanı 1'dir ve $3 \times 1 + 1 = 4$. Her kim Collatz Varsayımını ispatlarsa, bu dönüşümün de bir kara delik olduğunu ispatlamış olacaktır.

Neşeli kara delik avları!

New Scientist, Aralık 92'den çev.: Yaprak BENER