Aperiyodik Yazılar I

Estetiğin İzini Sürerken

Bir doğru parçasını nasıl olup da ikiye bölerseniz daha "estetik" olacağını hiç düşündünüz mü? Eğer düşünmediyseniz, lütfen şimdi düşünün. Elbette, herkesin farklı görüşleri olacaktır: Bazıları adaletli davranmak için "tam ortasından" cevabını verirler. Böylelikle elde iki eşit parça kalacaktır. Kimileriyse tekdüzeliği pek sevmezler ve bir büyük bir de küçük parçanın olmasını tercih ederler. Örneğin; onlar için dörtte birlik bir oran uygun düşebilir. Oysa eski Yunanlılar'dan bu yana bilinen bir bölüm, bu yanıtlardan hiçbirine uymamaktadır ve pek çok sanat teorisyeni için de "doğru cevap"tır:

————————·————

Burada eğer sol taraftaki parçanın uzunluğu u=1 ise, sağ taraftaki parçanın uzunluğu v=0,618... olacaktır. Biliyorum, şu ana kadarki satırlar size çok tuhaf gelebilir ve bir doğru parçasını estetik olarak ikiye ayırmanın kaygısını daha önce hiç duymamış olabilirsiniz. Ancak yukarıda bahsettiğim ve *altın bölüm* olarak bilinen bu bölüm çeşidi ister istemez hayatımızda bir şekilde yerini alır. Gıptayla izlediğimiz pek çok sanat eserinde, gözümüze ilişen bir çam kozalağında, bir arının soy ağacında görebiliriz onu. Tabii, basit de olsa matematiksel bir gözlük takmak şartıyla...

Peki, nedir altın bölümü böylesine özel kılan? Psikolojik ve estetik kaygıları bir yana bırakırsak matematiksel açıdan bu sorunun cevabı basittir: u'nun tüm uzunluk olan $u+v$'ye oranının, v'nin u'ya olan oranına eşit olması. Başka bir deyişle

$$\frac{u}{u+v}=\frac{v}{u} \text{ dur.}$$

Eğer u/c oranını ϕ ile gösterirsek

$$1+\frac{1}{\phi}=1+\frac{v}{u}=\frac{u+v}{u}=\frac{u}{v}=\phi$$

eşitliğine ulaşırız. Buradan elde ettiğimiz ϕ^2-ϕ-1=0 denkleminin pozitif kökü ise

$$\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1,6180339887...$$

sonucunu verir ki bu orana da *altın oran* denir.

Franz Hals'ın Gülen Şövalye' si

İdeal bir insan vücudunda "burun" boyunu birim olarak seçersek,

Tepe-kaş arası : $\frac{\phi^1}{\phi}$

Burun : $\frac{1}{\phi^2}$

Burun altı-boğaz : $\frac{\phi^1}{\phi^3}$

Boğaz-göğüs : $\frac{\phi^2}{\phi^4}$

Göğüs-göbek : $\frac{\phi^3}{\phi^5}$

olduğu görülür. Hals'ın bu eserinde de karşımıza yukarıdaki altın oran ölçeği çıkıyor. Ancak ideal insan vücudunda "burun boyu" neden birim olarak seçilmiştir; o da ayrı bir soru...

Turku ve Fibonacci

Fibonacci serisini doğada gözlemek elbette mümkündü, ama daha önce hiç iki metrelik, kırmızı, neon Fibonacci sayıları bir enerji santralinin yüz metrelik bacası üstünde görülmemişti. Şimdi ise İtalyan Mario Mertz'in bu çalışması, Finlandiya'da Turku şehrinin gökyüzünü aydınlatıyor.

Şu Altın Oran Dedikleri...

Altın oran denilen bu oranın irasyonel ve cebirsel bir sayı olmaktan öte pek çok özelliği daha vardır. Öncelikle Öklid geometrisinde kendisine geniş bir yer edindiği söylenebilir. ϕ ile bir üçgende, bir piramitte ya da bir sarmalda karşılaşmamız pekâlâ mümkündür. Mesela ; bunlardan *altın dikdörtgen* uzun ve kısa kenarlarının oranı ϕ'yi veren dikdörtgendir. Atina'daki Parthenon Tapınağı'nın ön cephesi tam bir *altın dikdörtgen* içine oturtulabilir. Aynı tapınağın içindeki daha pek çok yapının de benzer özellikleri taşımasına şaşırmamak gerekir sanırım. Ancak *altın oran*, yalnızca eski Yunan sanatına yansımamıştır. Mısır'daki Keops Piramidi'nden Paris'in ünlü Notre-Dame Katedrali'ne, Leonardo da Vinci'nin tablolarından Le Corbusier'nin modern mimarisine dek ondan izleri açıkça görmek mümkündür. Hatta Türk mimari ve sanatı da *altın oran*a ev sahipliği yapmıştır: Konya'da Selçuklular'ın inşa ettiği İnce Minareli Medrese'nin taçkapısı, İstanbuldaki Davut Paşa Camisi, Sivas'ta Mengüçoğulları'ndan günümüze miras kalan Divriği Külliyesi genel planlarından kimi ayrıntılarına dek ϕ ile içiçe bir görünüm sunar. Çağdaş Türk mimarisinde ise Anıtkabir'deki bazı mekânların yaklaşık olarak ϕ'nin çeşitli fonksiyonlarını verecek şekilde ölçülendirilmesi dikkat çekicidir.

Tüm bu büyük yapıtların yanısıra tavşanların da altın oranla uzaktan da olsa- ilgilerini gözden kaçırmamak gerekir. Herşey *Pisalı Leonardo* ya da diğer adıyla *Fibonacci*'nin (Bonaccio'nun oğlu anlamına gelir) 1202 yılında yayımladığı *Liber Abaci* adlı eserinde yer verdiği bir problemle başlar:

"Elimizde bir çift tavşan olduğunu varsayar ve her ay bir tavşan çiftinin ikinci aydan itibaren doğurgan hale gelen yeni bir tavşan çiftini dünyaya getireceğini kabul edersek, bir yıl içinde kaç tavşan çiftimiz olur?"

Çözüm ise ilk ve ikinci ayda bir, üçüncü ayda iki ve takip eden aylarda da sırasıyla 3,5,8,13,21,34,55,89,144 tavşan çiftinin olacağını gösterir. Dikkat edilirse, iki ardışık ay için eldeki tavşan çiftlerinin sayıları toplamı bir sonraki ayda elde edilecek sayıyı vermektedir. Ancak tavşanların matematik dünyasına ilginç bir problem olmaktan öte katkıları da vardır. Öncelikle Lucas'ın 19. yüzyılda *Fibonacci dizisi* adını verdiği ve her bir terimi kendisinden önce gelen ilk iki terimin toplamı olarak belirlenen 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,610,987....

dizisini bizlere kazandırmıştır. Bu dizi, pek çok ilginç özelliğe sahip olmakla beraber konumuzu ilgilendiren ve hemen her zaman *altın oran*la birlikte anılmasına yol açan bir yanı daha vardır: O da 5. terimden sonra ardışık terimlerin oranlarının ϕ'ye çok yakın olması ve terim sırası sonsuza giderken bu oranın ϕ'ye yakınmasıdır. *Fibonacci dizisi*yle altın oran arasındaki yakın ilişki, dizinin genel terimi f_n'i veren *Binet formülü*yle açıkça görülebilir:

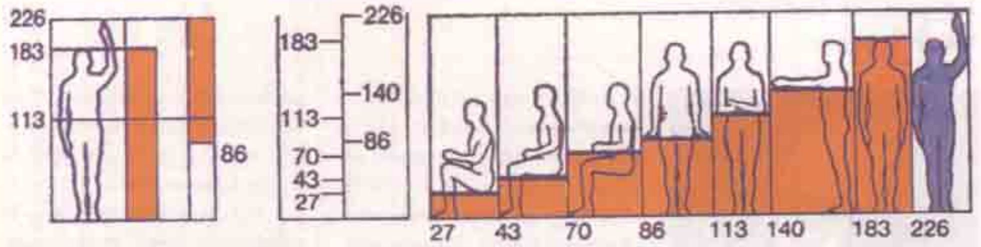
$$f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\phi^n-(-\phi)^{-n}\right],\quad n=1,2,3,\ldots$$

Öte yandan *Fibonacci dizisi* kendine özgü bir düzen içinde artan bir dizidir. Yalnızca $n\rightarrow\infty$ durumunda ϕ'yi veren ortak bir bölene sahip olması onu geometrik bir dizi olmaktan alıkoymaktadır. Oysa yine ϕ ile yakından ilgili, geometrik bir dizi daha vardır: *Altın dizi.* Ortak böleni daima ϕ'yi veren bu dizi

$1, \phi, \phi^2, \phi^3, \phi^4, \phi^5, \ldots$

elemanlarından oluşur. ϕ^n değerlerinin açılmasıyla altın dizi $1, \phi, 1+\phi, 1+2\phi, 2+3\phi, 3+5\phi, \ldots$ şeklinde de yazılabilir. Burada dikkati çeken nokta ise *altın dizi*nin *Fibonacci dizisi*yle aynı ardışık düzene sahip olması, diğer bir deyişle $u_{n+1}=u_n+u_{n-1}$ formülüne uygun artış göstermesidir.



Le Corbusier'nin Modulor'u

Altın oran, 1946 yılında ünlü mimar Le Corbusier tarafından da ele alındı ve mimarlıkta elverişli bir şekilde uygulanabilen orantılar sistemi olan Modulor böylece ortaya çıktı. Le Corbusier, önce kolunu kaldırmış bir insanın eriştiği yüksekliği (226 cm) standart bir ölçü olarak ele almış ve aynı ideal insanın yerden göbeğine kadarki yüksekliğini veren yarı değeri (113 cm) sürekli ϕ'ye bölerek ya da çarparak elde ettiği sonuçları tam sayılara dönüştürmüştü. Ortaya çıkansa, Modulor dediği ve Fibonacci dizisine benzer bir ardışıklık gösteren bir orantılar sistemiydi. Ünlü mimarın iddiası; bu sistem kullanıldığı takdirde doğrudan insanın doğasına hitap eden bir çevrenin yaratılacağıydı.

Kerameti Tavşanlarda Aramak

Fibonacci dizisi, elbette yalnızca tavşanların arasında kendisini gösteren bir matematiksel düzen değildir. Hatta doğanın inatla bu diziye sahip çıkmaya çalıştığı bile söylenebilir. Bunu görmek için aşağıdaki kesirler dizisini incelemek yeterlidir:

$$\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{5},\frac{5}{8},\frac{8}{13},\frac{13}{21},\frac{21}{34},\frac{34}{55},\frac{55}{89},\ldots$$

Burada her terimin payı bir önceki terimin paydasına, paydası ise yine bir önceki terimin pay ve paydası toplamına eşittir. Aynı dizinin terimleri, *Fibonacci dizisi*ndeki ardışık terimlerin oranlarını da vermektedir. İşin ilginç yanı, doğada en sık karşımıza çıkan ayçiçeklerinde sağ ve sol sarmal sayılarının yukarıdaki dizinin terimleri olan 34/55 veya 55/89 oranlarında olmasıdır. Üstelik bu da yetmezmiş gibi sarmal oranları, çam kozalağında 5/8,8/13, papatyada 21/34, ananas meyvasında 8/13'tür. İşte tüm bunlar *Fibonacci dizisi* ya da *altın oran*ın bizden hiç de uzakta olmadığını gösterir. Arıların soy ağacında *Fibonacci dizisi*nin matematiksel bir esas olarak karşımıza çıkması, *altın oran*ın çeşitli geometrik şekillere bürünerek Eperia örümceğinin ördüğü ağlardan bir yaban keçisinin boynuzuna dek kendine yer edinmesi de aynı kanıyı güçlendirmektedir. Anlaşılan keramet tavşanlarda değil, doğanın kendi düzeni içinde bir yerlerde gizlidir.

Modern mi, değil mi?

*Altın oran*ın ortaya koyduğu durağan ahenk klasik Yunan matematiğinin ruhuna pek uymakla beraber, *Fibonacci dizisi* daha nicel ve sayısal bir matematiğin habercisi gibidir. Öte yandan sahip oldukları bu durağanlığa rağmen günümüz matematiğinden de uzak kaldıkları söylenemez. 1970'lerde Roger Penrose, *altın oranı* daha modern bir anlayışla yeniden gündeme getirmiştir. Penrose'un bulduğu iki basit şekil -biri uçurtma, bir diğeri ok ucuna benzeyen şekiller-, düzlemi aperiyodik (periyodik olmayan) bir şekilde kaplayabilmektedir. Üstelik bu iki şeklin birbirlerine oranı da tanıdık bir sayıya eşittir: *Altın oran.* İşin modern olan yanı ise, aynı şekillerin düzlemi periyodik olarak kaplayamamasıdır.

İşte tüm bunlar ve modern imajıyla altın oran gelecek sayıda yine aynı sayfalarda...

Han Nazmi Özsöylev
Bilkent Matematik Topluluğu

Kaynaklar

Bergil, M.S., *Doğada, Bilimde, Sanatta Altın Oran*, Arkeoloji ve Sanat Yayınları, İstanbul, 1988

Cook, T.A., *The Curves of Life*, Dover Publications, New York, 1979

Çakar, Ö., *"Doğanın Güzellik Ölçüsü: Altın Oran"*, Bilim ve Teknik, Ağustos 1992, 6-11

Gardner, M., *Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers*, W. H. Freeman, New York, 1989

Huntley, H.E., *The Divine Proportion: A Study in Mathematical Beauty*, New York, 1970

Paulos,J.A., *Beyond Numeracy*, Penguin Books, London, 1992

Sterret,A., *"Can You Finish This Sequence? Turks and Fibonacci"*, Math Horizons, Nisan 1995, 2

Vajda,S., *Fibonacci &Lucas Numbers and The Golden Section*, Ellis Horwood, Chichester, 1989

http://galaxy.cau.edu/tsmith/kw/

http://watt.emf.net/wm/paint/auth/hals/laughing.jpg

http://www.math.okstate.edu/~wrightd/dynamics/lecnotes/

Çözmece

1. $\left[(\sqrt{5}+2)^{1/3}-(\sqrt{5}-2)^{1/3}\right]$'ün rasyonel olduğunu gösterip, bu sayının değerini bulunuz.

2. Ardışık Fibonacci sayılarının aralarında asal olduğunun kanıtlayınız. (Not: $f_1=1$, $f_2=1$, $n\geq2$ için $f_{n+1}=f_n+f_{n-1}$)

Geçen Ayın Çözümleri

1.

$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$ olduğundan

$$f_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}\frac{1}{k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\left[\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}\right]\frac{1}{k}$$

$$=f_{n-1}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n-1}{k-1}\frac{1}{k}$$

olur. Ayrıca;

$\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$ olduğundan ,

$$f_n=f_{n-1}-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$$

$$=f_{n-1}-\frac{1}{n}\left[(1-1)^n-1\right]$$

$=f_{n-1}+\frac{1}{n}$ olur.

$f_1=1$ olduğundan

$f_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ bulunur.

2. F_1 ve F_2 sırasıyla D ve A noktalarından BC'ye indirilen dikmelerin ayakları olsun. p=BC=CD ve q=AC olsun. ΔABC'ye Sinüs Teoremi'ni uygularsak CF_1=pcos80, CF_2=qcos70

$=\frac{p\sin30}{\sin80}=\frac{p\cos70}{2\sin80}$ olur.

Buradan;

$$\frac{CF_1}{CF_2}=\frac{\cos80}{\dfrac{\cos70}{2\sin80}}$$

$$=\frac{2\sin80\cdot\cos80}{\cos70}$$

$$=\frac{\sin160}{\sin20}=1$$

Dolayısıyla F1=F2 olur ve bu nokta AD ve BC'nin kesişim noktası olur.

Dolayısıyla AD $\perp$ BC bulunur.